MECANICA ŞI MECANISME

CURS

Stelian Alaci

CUPRINS

IV Analiza structurală a mecanismelor

4.1 Element cinematic. Cuple cinematice. Definiții. Clasificare

4.2 Lanț cinematic. Mecanism. Familie. Grad de libertate

4.3 Grupă structurală. Definiție. Exemple. Clasificare

4.4 Înlocuirea cuplei superioare

4.5

V Cinematica punctului material

5.1 Obiect. Traiectorie. Viteză. Accelerație

5.2 Mişcări particulare ale punctului material

5.2.1 Mişcarea rectilinie uniformă

5.2.2 Mişcarea rectilinie uniform variată

5.2.3 Mişcarea circulară

VI Cinematica mişcării absolute a rigidului

6.1 Parametrii cinematici în mişcarea absolută a rigidului

6.2 Relațiile lui Poisson

6.3 Determinarea distribuției de viteze

6.4 Mişcarea planparalelă a rigidului

VII Cinematica mişcării relative a rigidului

7.1 Mişcarea absolută, mişcarea de transport şi mişcarea relativă. Derivata absolută a unui vector.

7.2 Compunerea vitezelor şi accelerațiilor în mişcarea relativă cu punctul material

VIII Cinematica mişcării relative a rigidelor

8.1 Determinarea relației de compunere a vitezelor şi accelerațiilor liniare.

8.2 Determinarea relației de compunere a vitezelor şi accelerațiilor unghiulare

XI Cinematica mecanismelor plane cu cuple inferioare

9.1 Metoda ecuațiilor vectoriale

9.2 Construcția poligoanelor de viteze şi accelerații. Teorema asemănării

9.3 Metoda contururilor vectoriale

X Mecanisme cu came

10.1 Mecanismele cu came. Definiție. Exemple. Clasificare

10.2 Analiza cinematică a mecanismelor cu came

10.3Aspecte specifice ale funcționării mecanismelor cu came

10.4 Sinteza mecanismelor cu came

XI Mecanisme cu roți dințate

11.1.Mecanisme cu roți dințate. Definiție. Exemple. Clasificare.

11.2 Legea fundamentală a angrenării. Evolventa. Definiție. Proprietăți

11.3 Cremaliera de referință cu dinți drepți. Definirea roții dințate cilindrice cu dinți drepți cu ajutorul cremalierei de referință

11.4 Parametrii geometrici ai angrenajului format din două roți cu dantura generală în evolventă

XII Dinamica punctului material

12.1 Problemele fundamentale ale dinamicii punctului material liber.

12.2. Mărimi dinamice. Teoremele generale ale dinamicii punctului material.

12.3 Teoreme de conservare în dinamica punctului material

12.4. Dinamica mişcării relative a punctului material. Repausul relativ

XIII Momente de inerție

13.1 Momente de inerție. Definiție. Relații de calcul

13.2 Variația momentelor de inerție la translația axelor.

13.3 Variația momentelor de inerție la rotația axelor

13.4.Momente de inerție principale. Direcții de inerție principale

XIV Dinamica sistemelor de puncte materiale

14.1 Impulsul unui sistem de puncte materiale. Teorema impulsului pentru un sistem de puncte materiale. Teorema mişcării centrului de masă. Conservarea impulsului

14.2 Momentul cinetic al unui sistem de puncte materiale. Teorema momentului cinetic în raport cu un sistem de referință fix.

14.3 Energia cinetică şi lucrul mecanic în cazul unui sistem de puncte materiale. Teorema energiei cinetice şi a lucrului mecanic în raport cu un sistem de referință fix.

14.4 Teoremele impulsului, momentului cinetic şi energiei cinetice aplicate unui rigid

XV Noțiuni elementare de mecanică analitică

15.1 Principiul lui d'Alembert

15.2 Torsorul forțelor de inerție

XVI Noțiuni elementare de cinetostatica şi dinamica mecanismelor

16.1 Cinetostatica mecanismelor

16.2 Fazele mişcării maşinii

16.3 Randamentul mecanic

I Statica punctului material

1.1 Statica punctului material liber

Punctul material constituie o idealizare. Prin punct material în mecanică ,se înțelege o porțiune de material suficient de mică pentru a păstra proprietățile fizice ale corpului dar suficient de mare astfel ca structura atomica să nu apară în evidență. Dimensiunile punctului material se consideră neglijabile. Din acest motiv toate forțele ce vor acționa asupra unui punct material vor fi considerate vectori legați (Fig1.1.a). Dacă asupra unui punct acționează mai multe forțe, $\overline{F_1}$,…, $\overline{F_n}$, acestea vor putea fi compuse cu ajutorul regulii paralelogramului şi se obține o rezultantă unică, (Fig. 1.1.b).

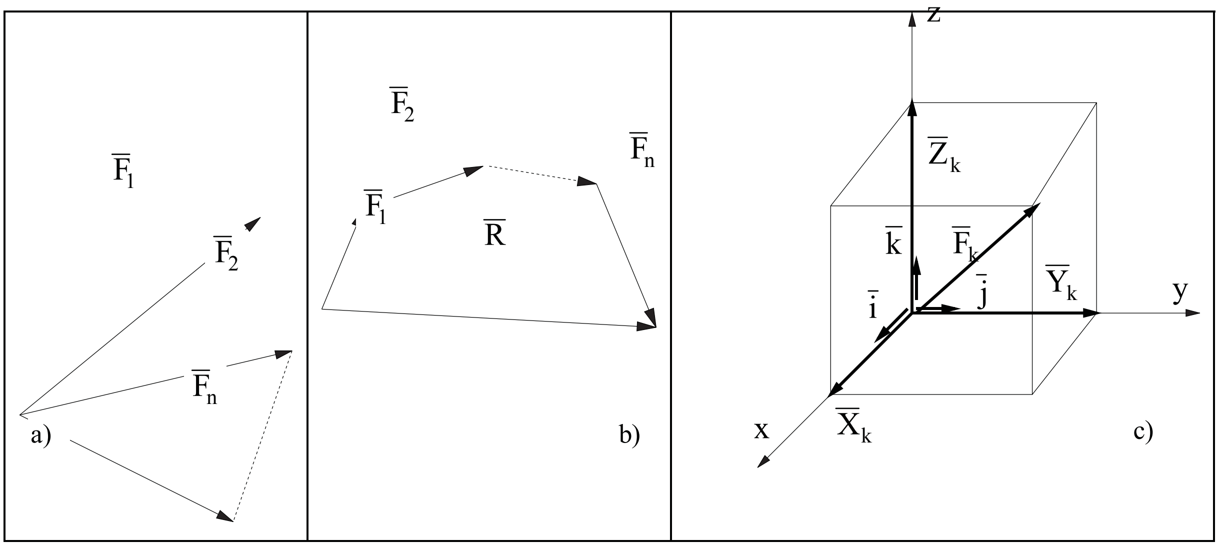


Figura 1.1

$$\overline{F} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + ...\overline{F_n} \tag{1.1}$$

Pentru a compune cele n forțe, se aşează intr-o ordine oarecare vectorii reprezentativi astfel ca originea unuia să se afle in vârful celui precedent. Vectorul ce are originea în originea primului şi vârful în extremitatea ultimului este vectorul rezultant. În spaţiu orice vector poate fi descompus după direcţiile a trei vectori necoplanari. Dacă cei trei vectori sunt ortogonali atunci ei pot fi situaţi pe trei axe reciproc perpendicularei pe care le vom nota x, y, z iar versorii acestor axe vor fi notaţi $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$

Proiecţia unui vector pe o axă este egală cu produsul scalar dintre vectorul respectiv si versorul axei respective. Astfel,]

$$V_x = \overline{V} \cdot \bar{i}; V_y = \overline{V} \cdot \bar{j}; V_z = \overline{V} \cdot \bar{k} \qquad (1.2)$$

iar vectorul poate fi scris:

$$\overline{V} = V_x \bar{i} + V_y \bar{j} + V_z \bar{k} = (\overline{V}\bar{i}) \cdot \bar{i} + (\overline{V}\bar{j}) \cdot \bar{j} + (\overline{V}\bar{k}) \cdot \bar{k} \qquad (1.3)$$

Prin descompunerea celor n forţe, $\overline{F_1}, .. \overline{F_n}$ după axele sistemului Oxyz avem:

$$\begin{cases} \overline{F_k} = X_k \bar{i} + Y_k \bar{j} + Z_k \bar{k} \\ \overline{R} = R_x \bar{i} + R_y \bar{j} + R_z \bar{k} \end{cases} \qquad (1.4)$$

Cum

$$\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F_k} \qquad (1.5)$$

va rezulta:

$$\begin{cases} R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} \\ R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} \\ R_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz} \end{cases} \tag{1.6}$$

iar mărimea rezultantei va fi:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \tag{1.7}$$

Pentru a preciza poziția rezultantei $\overline{R}$ va trebui să precizăm unghiurile □, □, □, pe care aceasta le face cu cele trei axe. Rezultă:

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R}; \cos\beta = \frac{R_y}{R}; \cos\gamma = \frac{R_z}{R} \tag{1.8}$$

În baza principiului inerției punctul material își va păstra starea de repaus dacă asupra sa nu lucrează nici o forță. Matematic acest lucru se scrie:

$$\overline{R} = 0 \tag{1.9}$$

Condiția (1.9) se poate exprima şi cu ajutorul proiecțiilor:

$$Rx=0; Ry=0; Rz=0 \tag{1.10}$$

Sau:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0 \tag{1.11}$$

Problemele de statică a punctului material liber prezintă două aspecte :

a) Probleme în care se cunosc forțele aplicate punctului material şi se cere poziția punctului când acestea sunt în echilibru.

b) Probleme în care se impun poziția şi se cere determinarea forțelor care-l mențin în această poziție.

De regulă sistemul de ecuații 1.11 este compatibil determinat dacă conține trei necunoscute in cazul spațial şi două necunoscute în cazul plan.

1.2 Statica punctului material supus la legături

Poziția unui punct material este caracterizată de trei parametri în cazul spațial si de doi parametri în cazul plan. Dacă se consideră cazul spațial acestea pot fi coordonatele carteziene x,y,z, ale punctului material.

Prin *legătură* se înțelege o restricție geometrică la care este supus punctul material. Astfel spus, punctul material este obligat să ocupe numai anumite poziții din toate pozițiile posibile. Dacă între parametrii ce caracterizează poziția punctului va fi o legătură punctul va fi obligat să se mişte pe o suprafață. Dacă vor fi două legături punctul se va mişca pe o curbă iar dacă vor exista trei legături poziția punctului va fi fixă,(Fig. 1.2 a şi 1.2 b).

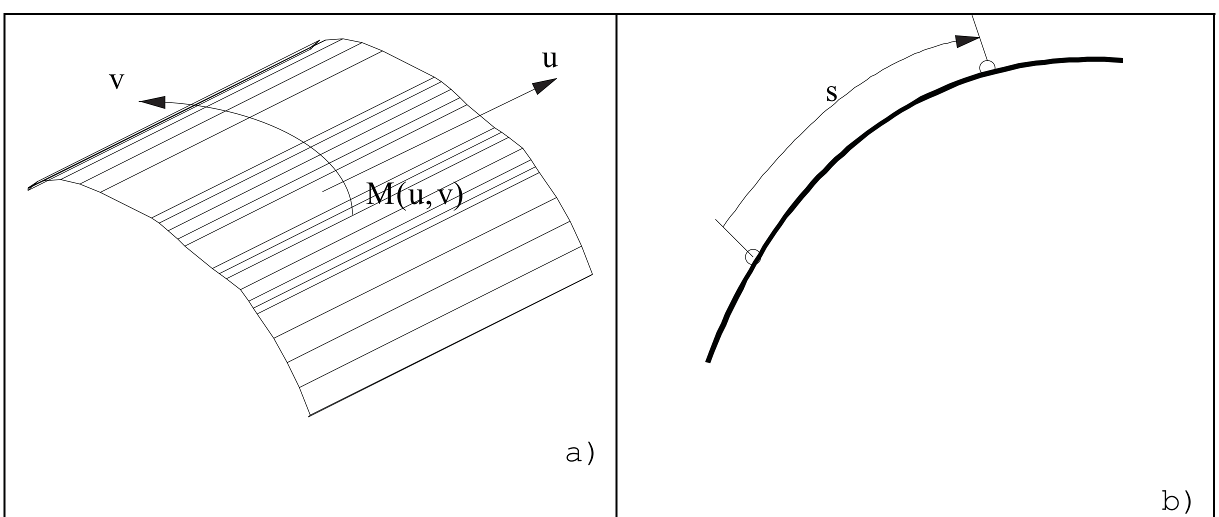


Figura 1.2

Pentru punctul material supus la legături condiția 1.9 nu mai este suficientă pentru păstrarea echilibrului.

Legăturile unui punct material sunt:

- rezemarea pe o suprafață
- rezemarea pe o curbă

Legăturile se numesc *unilaterale* atunci când restricția împiedică deplasarea numai într-un singur sens (exemplu legarea cu fire inextensibile) şi *bilaterale* atunci când deplasarea este împiedicată în ambele sensuri (exemplu un inel ce alunecă pe o sârmă).

Rezolvarea problemei în acest caz se face utilizând *axioma legăturilor*, care postulează:

'' O legătură geometrică poate fi înlocuită cu o forță denumită forța de legătură sau reacțiune. Sub acțiunea forțelor efectiv aplicate şi a forțelor de legătură punctul material poate fi considerat liber.''

Practic se desface legătura iar în locul ei se introduce o forță $\overline{R}$` asfel ca:

$$\overline{R} + \overline{R}' = 0 \tag{1.12}$$

sau cu ajutorul proiecțiilor pe axele reperului Oxyz

$$R_x + R'_x = 0;\;\; R_y + R'_y = 0;\;\; R_z + R'_y = 0 \tag{1.13}$$

Se consideră un inel obligat să rămână în echilibru pe un cerc (Fig.1.3).

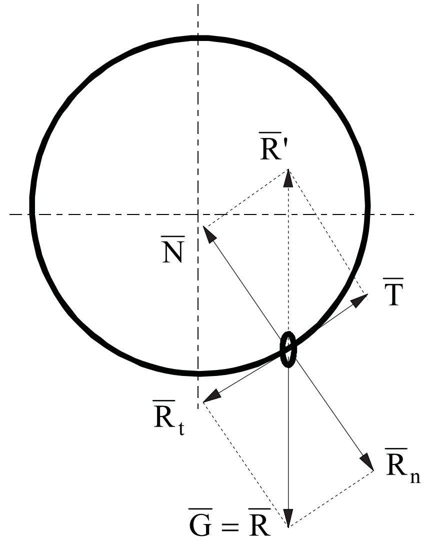


Figura1.3

Într-o poziţie oarecare forţa exterioară este greutatea $\overline{G}$.

Componentele rezultantei $\overline{R}$ şi ale recţiuni $\overline{R'}$ le descompunem după direcţia radială şi cea tangenţială astfel:

$$\overline{R} = \overline{R_n} + \overline{R_t}; \overline{R'} = \overline{N} + \overline{T} \qquad (1.14)$$

$\overline{R_n}$ are tendinţa de a desprinde punctul în direcţia normalei. Acesteia i se opune $\overline{N}$ (reacţiunea normală).

$\overline{R_t}$ tinde să deplaseze punctul în lungul curbei. Ei i se opune $\overline{T}$ *reacţiune tangenţială* sau *forţă de frecare*.

Din punctul de vedere al existenţei reacţiunii tangenţiale legăturile se clasifică în:

- legături *ideale* $\overline{T} \equiv 0$
- legături *cu frecare* $\overline{T} \neq 0$

1.3 Echilibrul punctului material supus la legături fără frecare.

a) Considerăm punctul aflat pe o suprafaţă lucie acţionat de rezultanta forţelor efectiv aplicate, (Fig.1.4). Forţele din ecuația $\overline{R}+\overline{R}'=0$ le descompunem după normala unică în punctul M la suprafața şi tangenta tt din planul determinat de normală şi direcția forței $\overline{R}$. Scriem ecuațiile:

$$\overline{R}=\overline{R}_n+\overline{R}_t;\ \ \overline{R}'=\overline{N}+\overline{T}$$

$$\overline{T}\equiv 0 \Rightarrow \overline{R}_t=0$$

Concluzii:

1) pentru ca un punct să fie în echilibru pe o suprafață lucie, rezultanta forțelor aplicate trebuie să aibă direcția normalei la suprafață în acel punct.
2) Reacțiunea în cazul unui punct sprijinit pe o suprafață lucie este dirijată întotdeauna după normală la suprafață în punctul considerat. Trebuie determinat numai mărimea acesteia.

b) Considerăm că punctul se află pe o curbă lucie. În acest caz direcțiile de descompunere a rezultantei R sunt:

- direcția tangentei la curbă (unic determinată)
- normala la curba cuprinsă în planul determinat de tangentă şi rezultanta $\overline{R}$, (Fig.1.4).

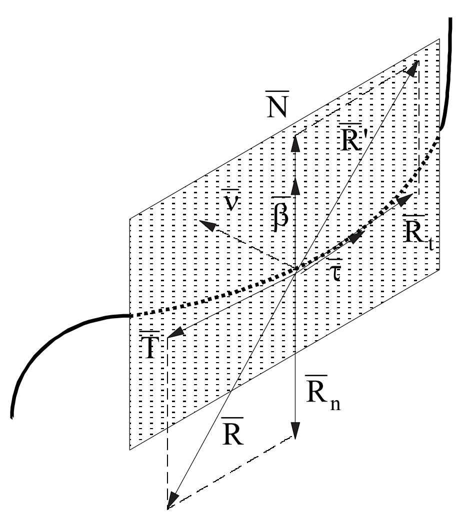


Figura1.4

Din nou:

$$\overline{R} = \overline{R}_n + \overline{R}_t; \quad \overline{R}' = \overline{N} + \overline{T}$$

$$\overline{T} \equiv 0 \Rightarrow \overline{R}_t = 0$$

Concluzii:
Rezultanta forțelor efectiv aplicate trebuie să fie cuprinsă în planul normal la curba din acel punct. Reacțiunea introdusă de legătura fără frecare pe o curbă lucie este o forță situată în planul normal la curbă.Are şi mărimea şi direcția necunoscute. Pentru determinarea acesteia se consideră descompusă după direcția normalei principale şi a binormale astfel:

$$\overline{R} = \overline{R_\nu'} + \overline{R_\beta'}$$

1.4 Echilibrul punctului material supus la legături cu frecare.

Fie un corp considerat punctiform de greutate G care se sprijină pe o suprafață aspră ca în Figura.1.5. Pentru $Q < F_{max}$ corpul nu se mişcă. Dacă $Q \geq F_{max}$ corpul începe să lunece. Notând cu α unghiul dintre reacțiunea $\overline{R'}$ şi normala la plan condiția ca să nu avem alunecare este:

$$\left|\overline{T}\right| \leq \left|\overline{N}\right| \mathrm{tg}\alpha \tag{1.15}$$

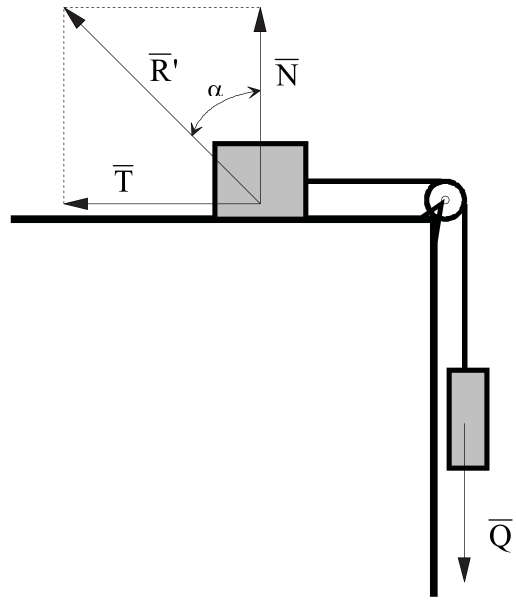


Figura 1.4

Coulomb a pus în evidență proporționalitatea dintre forța de frecare şi apăsarea normală. Factorul de proporționalitate este o mărime adimensională şi se numeşte *coeficient de frecare, de alunecare*.

$$\left|\overline{T}\right| \leq \mu\left|\overline{N}\right| \tag{1.16}$$

Mărimea coeficientului de frecare depinde de materialele în contact şi starea suprafeței celor două corpuri. Acesta se notează cu μ. Unghiul format între normala $\overline{N}$ şi recțiune $\overline{R}'$ se numeşte unghi de frecare.

Forța de frecare (caracterizare):

- are modulul $\left|T\max\right| = \mu\left|\overline{N}\right|$ când este maximă. Când nu se atinge această valoare are modulul nedeterminat;
- direcția tangentă la suprafață ;
- sensul opus tendinței de deplasare a punctului material;
- punctul de aplicație în punctul de contact al corpurilor.

II . Sisteme de forțe. Reducerea sistemelor de forțe.

a

2.1. Caracterul de vector alunecător al forței aplicate unui rigid.

Corp rigid este corpul pentru care distanța dintre oricare două puncte nu se modifică. Rezultă de aici că:

- două forțe direct opuse şi egale aplicate în două puncte ale unui rigid nu produc nici un efect.
- într-un sistem de forțe ce acționează asupra unui rigid se pot suprima sau introduce două forțe egale si direct opuse fără a modifica efectul sistemului de forțe asupra rigidului.

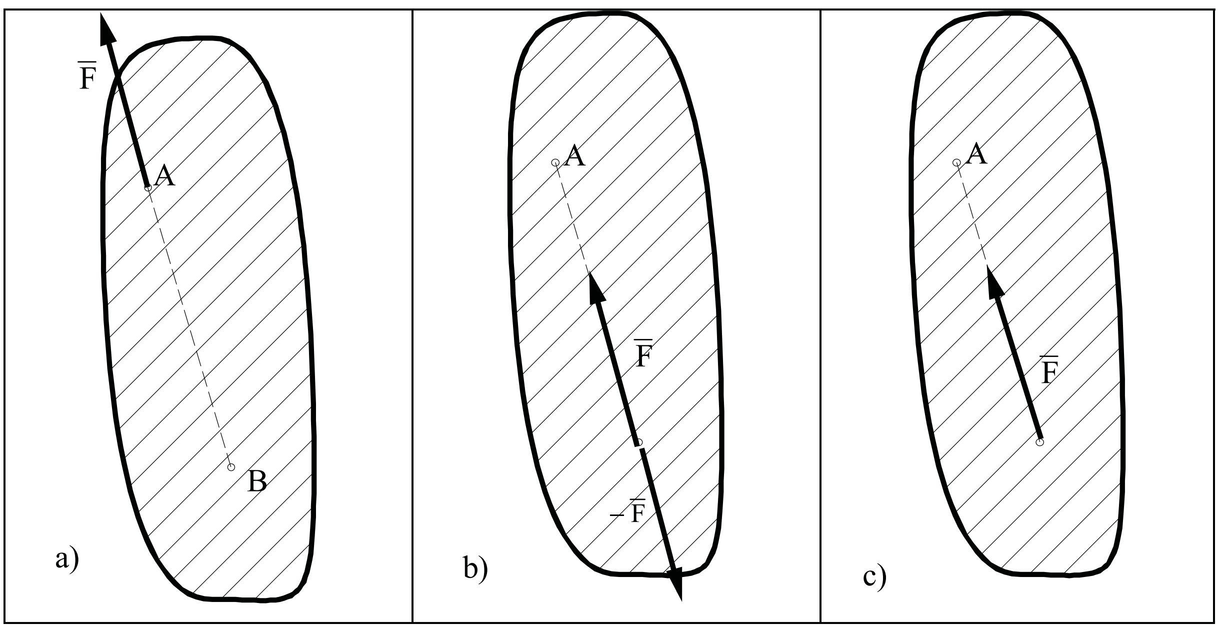


Figura 2.1

Fie o dreaptă ce trece prin punctele A şi B ale unui rigid, (Fig.2.1), iar în punctul A acționează forța $\overline{F}$. A doua concluzie permite a introduce forțele $\overline{F}$ şi $\overline{F}$ în punctul B. Forța $\overline{F}$ din A şi forța $-\overline{F}$ din B, conform primei concluzii nu produc nici un efect şi se pot suprima Fig2.1 b. Rămâne forța $\overline{F}$ din B, (Fig2.1c). Cum nu s-au efectuat decât operații care nu modifică efectul sistemului de forțe asupra rigidului, rezultă că efectul forței $\overline{F}$ din A este acelaşi cu efectul forței $\overline{F}$ aplicate în B, şi de aici, caracterul de *vector alunecător* al forței aplicate rigidului.

2.2 Momentul forței în raport cu un punct. Proprietăți. Momentul forței în raport cu o axă.

Definiție. Se numeşte *moment al unei forțe* $\overline{F}$ *în raport cu un punct O numit pol*, produsul vectorial dintre vectorul de poziție al punctului de aplicație al forței A în raport cu punctul O şi vectorul $\overline{F}$.

$$\overline{M_0}(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F} \qquad (2.1)$$

$\overline{M_0}(\overline{F})$ este un vector ,(Fig.2.2):

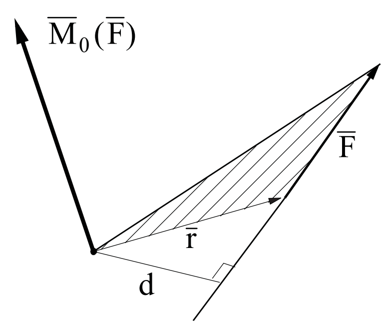


Figura 2.2

- aplicat în O,
- perpendicular pe planul vectorilor $\overline{r}$ şi $\overline{F}$,
- sensul dat de regula burghiului (se aplică vectorii $\overline{r}$ şi $\overline{F}$ în O iar sensul este sensul în care înaintează un burghiu drept care se roteşte astfel ca $\overline{r}$ să se suprapună peste $\overline{F}$ pe drumul cel mai scurt).
- mărimea este mărimea unui produs vectorial

$$\overline{M_0}(\overline{F}) = |\overline{r}| \cdot |\overline{F}| \sin\alpha \qquad (2.2)$$

Unitatea de măsură este N.m, (newton înmulțit cu metru).

Proprietățile momentului forței în raport cu un punct:

1.este nul când suportul forței trece prin pol,($\overline{r}=0$),

2.momentul nu se modifică dacă forța alunecă pe propriul ei suport, (Fig. 2.3).

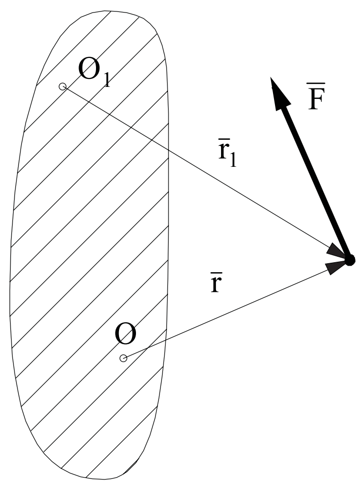


Figura 2.3

$$\overline{M_{01}}(\overline{F}) = \overline{r_1} \times \overline{F} = (\overline{O_1 O} + \overline{OA}) \times \overline{F} = \overline{O_1 O} \times \overline{F} + \overline{OA} \times \overline{F} = \overline{r} \times \overline{F} = \overline{M_0}(\overline{F})$$

$\overline{O_1 O} \times \overline{F} = 0$ (deoarece vectorii sunt coliniari)

Forța aplicată unui rigid este caracterizată de doi vectori $\overline{F}$ şi $\overline{M}_0(\overline{F})$ dați prin:

$$\begin{cases} \overline{F} = F_x \overline{i} + F_y \overline{j} + F_z \overline{k} \\ \overline{M_0}(\overline{F}) = M_x \overline{i} + M_y \overline{j} + M_z \overline{k} \end{cases} \qquad (2.3)$$

Cei doi vectori sunt caracterizați de şase parametri F_x, F_y, F_z, şi M_x, M_y, M_z. Aceşti parametri nu sunt independenți deoarece $\overline{F}$ şi $\overline{M_0}(\overline{F})$ sunt perpendiculari (produsul scalar este nul).

$$\overline{F} \cdot \overline{M_0}(\overline{F}) = F_x M_x + F_y M_y + F_z M_z = 0 \qquad (2.4)$$

3. Momentul forței se modifică la schimbarea polului, (Fig.2.4).

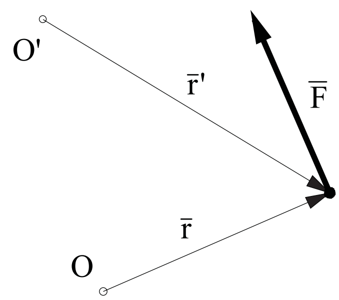


Figura 2.4

$$\overline{M_0}(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F}$$
$$\overline{M_{0'}}(\overline{F}) = \overline{r'} \times \overline{F} = \left(\overline{O'O} + \overline{r}\right) \times \overline{F} = \overline{O'O} \times \overline{F} + \overline{r} \times \overline{F} = \overline{M_0} + \overline{O'O} \times \overline{F}$$

Momentul unei forțe în raport cu O' *este egal cu momentul forței în raport cu O,la care se adaugă momentul aceleiaşi forțe, considerată însă cu punctul de aplicație în O.*

Expresia analitică a momentului unei forțe:

$$\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$$
$$\overline{F} = F_x\overline{i} + F_y\overline{j} + F_z\overline{k}$$

$$\overline{M_0}(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(yF_z - zF_y\right) \cdot \overline{i} + \left(zF_x - xF_z\right)\overline{j} + \left(xF_y - yF_x\right)\overline{k} \qquad (2.5)$$

sau cu ajutorul proiecțiilor:

$$M_x = yF_z - zF_y;$$
$$M_y = zF_x - xF_z;$$
$$M_z = xF_y - yF_x. \qquad (2.6)$$

Momentul forței $\overline{F}$ în raport cu o axă (Δ) este egal cu proiecția pe acea axă a momentului forței calculat în raport cu un punct oarecare de pe acea axă.

Fie $\overline{u}$ versorul axei Δ.

$$M_{\Delta}(\overline{F}) = \overline{u}(\overline{r} \times \overline{F}) = \overline{u}\,\overline{r}\,\overline{F}. \qquad (2.7)$$

Momentul forței în raport cu o axă este un scalar (produsul mixt al vectorilor $\overline{u}, \overline{r}, \overline{F}$.)

Proprietățile momentului unei forțe în raport cu o axă:

a) momentul forței în raport cu o axă este nul când :

- forța este paralelă cu axa ;
- suportul forței întâlneşte axa;
- suportul forței coincide cu axa.

b) momentul este un invariant față de deplasarea punctului O pe axe.

Demonstrație:

Fie O şi O_1 două puncte de pe axa Δ. $\overline{M_{O_1}}(\overline{F}) = \overline{M_0}(\overline{F}) + \overline{O_1 O} \times \overline{F}$ conform proprietății (3) a momentului în raport cu un punct. Multiplicăm scalar ambii membri cu $\overline{u}$.

$\overline{u} \cdot \overline{M_{O_1}}(\overline{F}) = \overline{u} \cdot \overline{M_0}(\overline{F}) + \overline{u} \cdot (\overline{O_1 O} \times \overline{F})$. Dar $\overline{u} \cdot (\overline{O_1 O} \times \overline{F}) = 0$ pentru că $\overline{u}$ şi $\overline{O_1 O}$ sunt coliniari .(un produs mixt este nul când doi vectori sunt coliniari). Expresia analitică se obține exprimând produsul scalar al vectorilor $\overline{u}, \overline{F}, \overline{r}$ cu ajutorul expresiei analitice.

$$\overline{u} = \cos(\alpha)\overline{i} + \cos(\beta)\overline{j} + \cos(\gamma)\overline{k}, \quad \cos(\alpha)^2 + \cos(\beta)^2 + \cos(\gamma)^2 = 1$$

pentru că $\overline{u}$ este versor

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$
$$\bar{F} = F_x\bar{i} + F_y\bar{j} + F_z\bar{k}$$

$$M_\Delta(\bar{F}) = \bar{u}\,\bar{r}\,\bar{F} = \begin{vmatrix} \cos(\alpha) & \cos(\beta) & \cos(\gamma) \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{2.8}$$

Teorema lui Varignon, în raport cu un punct Enunțul teoremei este următorul:

Pentru un sistem de forțe dat care admite o rezultantă unică, momentul forței rezultante în raport cu un punct este egal cu suma vectorială a momentelor forțelor componente calculate în raport cu același punct.

Demonstrație:

Fie $\overline{F_k}$,un sistem de forțe concurente în M ; k=1,2,...n.

$\bar{R} = \sum_{k=1}^{n}\overline{F_k}$. Momentul rezultantei $\bar{R} : \overline{M_0}(\bar{R}) = \bar{r}\times\bar{R}$. Suma momentelor forțelor $\overline{F_k}$: $\sum_{k=1}^{n}\overline{M_0}(\overline{F_k}) = \sum_{k=1}^{n}\bar{r}\times\overline{F_k} = \bar{r}\times\sum_{k=1}^{n}\overline{F_k} = \bar{r}\times\bar{R}$.

$$\overline{M_0}(\bar{R}) = \sum_{k=1}^{n}\overline{M_0}(\overline{F_k}) \tag{2.9}$$

Dacă se multiplică scalar relația 2.9 cu versorul $\bar{u}$ al unei axe oarecare(Δ) se obține :

$$\bar{u}\,\overline{M}_0(\bar{R}) = \bar{u}\sum_{k=1}^{n}\bar{u}\,\overline{M}_0(\bar{F}_k) = \sum_{k=1}^{n}M_\Delta(\bar{F}_k)$$

Rezultă:

$$M_\Delta(\bar{R}) = \sum_{k=1}^{n}M_\Delta(\bar{F}_k) \tag{2.10}$$

)

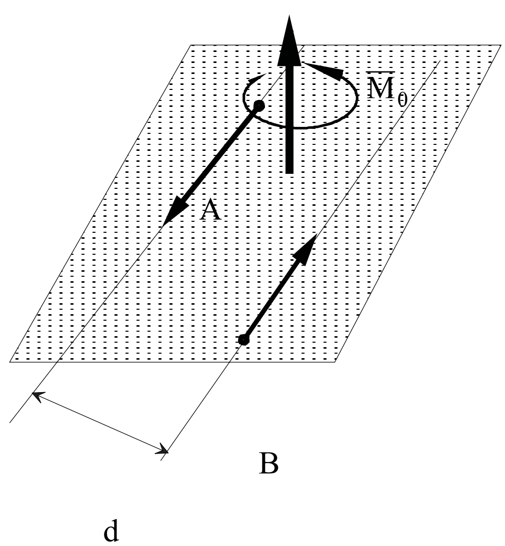
Relația 2.10 exprimă matematic *teorema lui Varignon aplicată în raport cu o axă* și se enunță: *Pentru un sistem de forțe care admite o rezultantă unică momentul forței rezultantei în raport cu o axă este egal cu suma algebrică a momentelor forțelor componente calculate în raport cu aceiași axă*.”

2.3. Cupluri de forțe.

Definiție: Se numește *cuplu de forțe* un ansamblu de două forțe paralele egale în modul și de sens contrar .

Pentru caracterizarea cuplului trebuie precizate:

- modulul forțelor,
- brațul cuplului (Fig.2.5) (distanța dintre suporturile celor două forțe),
- planul cuplului (planul definit de direcțiile celor două forțe)
- sensul în care cuplul tinde să rotească corpul.(reprezentat prin săgeata curbă).



Rezultanta cuplului este nulă.

$$\overline{R} = \overline{F} - \overline{F} = 0 \qquad (2.1$$

1)

Momentul cuplului în raport cu un punct oarecare are valoarea:

$$\overline{M_0} = \overline{OB} \times \overline{F} + \overline{OA} \times \left(-\overline{F}\right) = \left(\overline{OB} - \overline{OA}\right) \times \overline{F} = \overline{AB} \times \overline{F} = \overline{M_0} \qquad (2.12)$$

Relația 2.12 justifică că $\overline{M}_0$ nu depinde de punctul față de care s-au calculat momentele celor două forțe ci numai de punctele A şi B (sau oricare alte puncte de pe suporturile forțelor). Momentul cuplului este un *vector liber*. Momentul cuplului este unul din cele mai simple sisteme de forțe ce acționează asupra unui rigid. Efectul aplicării lui asupra unui rigid este o rotație asupra unei axe perpendiculare pe planul cuplului.

Proprietățile momentului cuplului:

- momentul cuplului este un <u>vector liber</u> care acționează în oricare punct al sistemului;
- modulul cuplului

$$|\overline{M}| = |\overline{F}||\overline{AB}|\sin[\angle(\overline{F}, \overline{AB})] = |\overline{F}|d \qquad (2.13)$$

d = brațul cuplului

- momentul cuplului are direcția perpendiculară pe planul cuplului;
- sensul momentului cuplului se determină cu regula burghiului drept.

Definiție: două cupluri sunt echivalente dacă au acelaşi moment :

Două cupluri echivalente au acelaşi modul, acelaşi sens şi acționează în acelaşi plan sau în plane paralele. Se obişnuieşte a se nota un cuplu prin $\left(\overline{F}; -\overline{F}; d\right)$ indicându-se astfel valoarea forțelor care-l compun şi brațul său. Se pot demonstra următoarele două proprietăți:

a) un cuplu poate fi mutat oricum în planul său (fie prin deplasarea forțelor pe suporturile lor sau paralele cu ele înseşi sau prin rotirea forțelor cu acelaşi unghi şi în acelaşi sens) fără ca efectul său să se schimbe.

b) un cuplu $\left(\overline{F};-\overline{F};d\right)$ poate fi înlocuit cu un alt coplanar $\left(\overline{F_1},-\overline{F_1},d\right)$ cu condiția să aibă acelaşi moment $\left(F \cdot d = F_1 \cdot d_1\right)$ şi acelaşi sens de rotație.

Compunerea cuplurilor

În compunerea cuplurilor se distinge două cazuri :

a) cuplurile sunt situate în acelaşi plan sau în plane paralele.

Fie $\left(\overline{F_1},-\overline{F_1},d_1\right);\left(\overline{F_2},-\overline{F_2},\overline{d_2}\right);.....\left(\overline{F_n},-\overline{F_n},\overline{d_n}\right)$ n cupluri coplanare. Conform relației (2.1) şi a posibilității de înlocuire a unui cuplu cu un cuplu echivalent; forțele $\overline{F_1},\overline{F_2},....\overline{F_n}$ pot fi aplicate în punctul A iar forțele $-\overline{F_1},...-\overline{F_n}$ în punctul B. Putem scrie:

$$\overline{M}_k = \overline{A_k B_k} \times \overline{F}_k = \overline{AB} \times \overline{F}'_k \qquad (2.12)$$

sau în modul:

$$|\overline{F}_k| d_k = |F'_k| d; \quad k = 1,2,\dots,n.$$

Prin urmare, în punctul A au fost aplicate *n* forțe concurente $\overline{F_1},\overline{F_2},...\overline{F_n}$ şi în punctul B la fel au fost aplicate $-\overline{F_1},-\overline{F_2},...\overline{F_n}$. Compunerea celor două sisteme de forțe concurente în A şi în B vor conduce la două rezultante paralele de sens contrar şi egale în modul, $\overline{R}$ şi $-\overline{R}$. Acestea vor forma la rândul lor un nou cuplu al cărui moment va fi.

$$\overline{M} = \overline{AB} \times \overline{R} \qquad (2.13)$$

Astfel

$$\overline{AB}\times\overline{R}=\overline{AB}\times\overline{F'_1}+\overline{AB}\times\overline{F'_2}+...+\overline{AB}\times\overline{F'_n}$$

care scrisă concentrat.

$$M=\sum_{k=1}^{n}M_k \tag{2.14}$$

Relația a fost scrisă pentru proiecțiile momentelor cuplurilor pe direcția perpendiculară pe planul acestora.

Concluzie:

Compunerea mai multor cupluri coplanare conduce la un cuplu situat în acelaşi plan, al cărui moment are mărimea egală cu suma algebrică a cuplurilior componente.

b) cupluri situate în plane oarecare.

Fie cuplurile $\left(\overline{F_k},-\overline{F_k},d_k\right)$ k= 1,2 ....n situate în plane neparalele, (Fig. 2.7). Momentele acestor cupluri sunt vectorii liberi $\overline{M_1},\overline{M_2},...\overline{M_n}$ perpedticulari pe planele cuplurilor respective. Determinarea momentului acestor cupluri în raport cu un punct arbitrar O se face cu relațiile:

$$\overline{M_0}=\sum_{k=1}^{n}\left[\overline{r_k}\times\overline{F_k}+\overline{r'_k}\times\left(-\overline{F_k}\right)\right]=\sum_{k=1}^{n}\left(\overline{r_k}-\overline{r'_k}\right)\times\overline{F_k}=\sum_{k=1}^{n}\overline{A_k B_k}\times\overline{F_k}=\sum_{k=1}^{n}\overline{M_k}$$

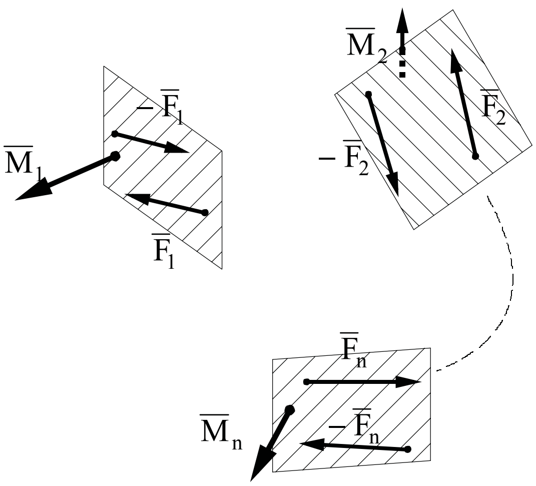


Figura 2.7

Se poate conchide:

$$\overline{M} = \sum_{k=1}^{n} \overline{M}_k \qquad (2.15)$$

Adică, *un sistem de n cupluri necoplanare pot fi înlocuite cu un singur cuplu al cărui moment este egal cu suma vectorială a momentelor componente. Cuplul rezultant se află situat într-un plan perpendicular pe direcția vectorului* $\overline{M}$ *.*

2.4 Reducerea sistemelor de forțe aplicate unui rigid

Încărcările unei piese dintr-un ansamblu mecanic sunt deosebit de variate de la caz la caz. Adeseori se constată că sistemele de forțe diferite au efecte mecanice similare. Apare ideea care constă în a reduce sistemul de forțe ce acționează asupra unui rigid la un sistem mai simplu, dar care să producă acelaşi efect mecanic. Această operație poartă denumirea de *reducere a sistemului de forțe*. Obținerea sistemelor de forțe echivalente are la bază operațiile elementare de echivalență care constau în :

a) deplasarea unei forțe ce acționează asupra rigidului în lungul suportului

b) suprimarea sau introducerea în sistemul de forțe inițial a două forțe egale şi direct opuse.

c) înlocuirea mai multor forțe concurente prin rezultanta lor sau înlocuirea unei forțe prin componentele ei.

Se consideră un rigid acționat de o forță $\overline{F}$ în punctul A, (Fig. 2.8).

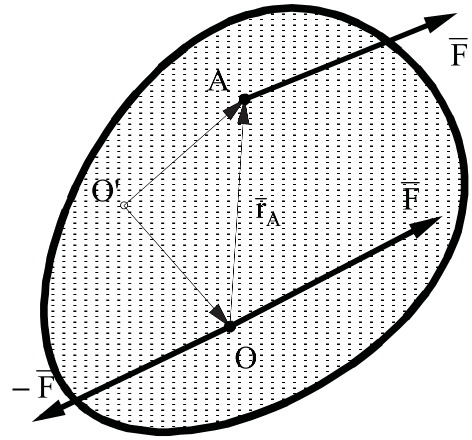


Figura 2.8

În punctul O se aplică un ansamblu de două forțe egale în modul cu F dar de sensuri contrare. Forța $\overline{F}$ din A şi forța $-\overline{F}$ din O formează un cuplu de forțe al cărui moment este:

$$\overline{M_0} = \overline{r}_A \times \overline{F} \qquad (2.16)$$

Reducerea forței $\overline{F}$ în raport cu punctul O conduce la un ansamblu compus dintr-o forță $\overline{F}$ şi un moment $\overline{M_0}$. Acest ansamblu se numeşte torsor de reducere în O al forței $\overline{F}$ aplicată în A şi se notează simbolic:

$$\tau_0 = \left\{ \frac{\overline{F}}{\overline{M_0}} \right\} \qquad (2.17)$$

Deşi momentul cuplului este vector liber a fost marcat cu indicele 0 pentru a se preciza punctul în care s-a făcut reducerea.

Torsorul de reducere exprimă efectul mecanic exercitat într-un punct al rigidului de o forță ce acționează în alt punct al acestuia .

Prin reducerea unui sistem de forțe oarecare se înțelege înlocuirea sistemului cu torsorul său. Dacă se face reducerea într-un alt punct al rigidului O' forța nu se modifică iar momentul se modifică conform relației deduse la variația momentului unui vector la schimbarea polului.

$$\tau_{O'} = \begin{Bmatrix} \overline{F} \\ \overline{M'_o} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overline{F} \\ \overline{O'A} \times \overline{F} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overline{F} \\ \left(\overline{O'O} + \overline{r_A}\right) \times \overline{F} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} O \\ \overline{O'O} \times \overline{F} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \overline{F} \\ \overline{r_A} \times \overline{F} \end{Bmatrix} =$$
$$= \begin{Bmatrix} O \\ -\overline{OO'} \times \overline{F} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \overline{F} \\ \overline{M_O} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overline{F} \\ \overline{M_0} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} O \\ \overline{O'O} \times \overline{F} \end{Bmatrix} \tag{2.18}$$

Relația (2.18) arată că la schimbarea polului de reducere se modifică momentul cuplului. Dacă asupra rigidului va acționa un ansamblu de forțe $\overline{F_1}, \overline{F_2}, \overline{F_k}$ aplicate în punctele $A_1, A_2, ..., A_k, ,A_n$, (k=1,2..,n). Pentru reducerea sistemului de forțe într-un punct O față de care punctele de aplicație ale forțelor au vectorii de poziție $\overline{r_1}, \overline{r_2}, ...\overline{r_n}$ se reduce fiecare din n forțe aplicate în O şi n momente $\overline{M_1}, \overline{M_2}, ..., \overline{M_n}$ corespunzătoare acestora unde:

$$\overline{M_1} = \overline{r_1} \times \overline{F_1}; \overline{M_2} = \overline{r_2} \times \overline{F_2}; ...\overline{M_n} = \overline{r_n} \times \overline{F_n}$$

Torsorul rezultant pentru sistemul dat corespunzător punctului de reducere ales va avea componentele:

$$\tau_O = \begin{Bmatrix} \overline{R} \\ \overline{M_O} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{k=1}^{n} \overline{F_k} \\ \sum_{k=1}^{n} \overline{r_k} \times \overline{F_k} \end{Bmatrix} \tag{2.1}$$

9)

făcând reducerea în puncte diferite se caută în continuare care sunt mărimile ce nu se modifică la schimbarea polului de reducere. Fie punctul de reduce O'.

$$\tau_{0'} = \begin{Bmatrix} \overline{R} \\ \overline{M}_{O'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} \overline{F}_k \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \overline{M'}_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} \overline{F}_k \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \overline{r'}_k \times \overline{F}_k \end{Bmatrix}; \qquad \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k = \overline{R}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{r'}_k \times \overline{F}_k = \sum_{k=1}^{n} (\overline{OO'} + \overline{r}_k) \times \overline{F}_k = \sum_{k=1}^{n} \overline{OO'} \times \overline{F}_k + \sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k \times \overline{F}_k = \overline{OO'} \times \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k + \sum_{k=1}^{n} \overline{M}_{O_k} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \overline{M}_{O_k} - \overline{O'O} \times \overline{R}$$

În final se obține:

$$\tau_{0'} = \begin{Bmatrix} \overline{R} \\ \overline{M}_O - \overline{O'O} \times \overline{R} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overline{R} \\ \overline{M}_O \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ \overline{O'O} \times \overline{R} \end{Bmatrix} \qquad (2.20)$$

Relația 2.20 arată că forța rezultantă este un invariant al operației de reducere (nu depinde de alegerea polului).

Un alt invariant se obține prin multiplicarea scalară a relației care exprimă legătura dintre momentele rezultante pentru torsorii aceluiași sistem în punctele O și O'.

$$\overline{M}_{O'} = \overline{M}_O - \overline{O'O} \times \overline{R} \Rightarrow \overline{R}\,\overline{M}_{O'} = \overline{R}\overline{M}_O - \overline{R}(\overline{O'O} \times \overline{R}).$$

$$\overline{R}(\overline{O'O} \times \overline{R}) = 0$$

deoarece dacă doi factori sunt egali într-un produs mixt acesta se anulează

$$\overline{R} \cdot \overline{M_{O'}} = \overline{R} \cdot \overline{M_O} \tag{2.21}$$

Relația (2.21) se poate scrie:

$$\frac{\overline{R}}{|R|}\overline{M'_O} = \frac{\overline{R}}{|R|}\overline{M_O} \tag{2.22}$$

Se observă că vectorul $\frac{\overline{R}}{|R|}$ reprezintă versorul forței rezultante. Cu această observație relația 2.22 spune că: *proiecția vectorului moment pe direcția forței rezultante este constantă în orice punct de reducere.*

Exprimarea produsului $\overline{R} \cdot \overline{M_O}$ cu ajutorul componentelor carteziene conduce la o sumă de trei produse.

$$\overline{R} \cdot \overline{M_O} = R_x M_{0X} + R_y M_{0y} + R_z M_{0z} \tag{2.23}$$

Această sumă poartă denumirea de *trinomul invariant* al sistemului de forțe: $\overline{F_k}$ k=1,2,..n.

Două noțiuni importante legate de sistemele de vectori sunt:

a) torsorul minimal

La reducerea unui sistem de forțe aplicate unui rigid se obține un torsor format dintr-un vector rezultant $\overline{R}$ şi un vector moment rezultant $\overline{M}_O$. Descompunerea după două direcții (una paralelă şi cealaltă normală $\overline{R}$) a vectorului $\overline{M}_O$ va da două componente $\overline{M}_R$ şi $\overline{M}_N$, (Fig. 2.9)

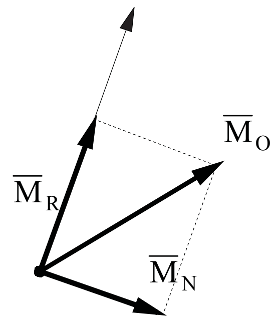


Figura 2.9

$$\overline{M}_O = \overline{M}_R + \overline{M}_N \tag{2.24}$$

La schimbarea polului de reducere $\overline{M}_O$ se modifică iar $\overline{M}_R$ este un invariant. Rezultă că la schimbarea polului de reducere se modifică numai componenta $\overline{M}_N$. Relația 2.24 arată că există puncte în care vectorul moment rezultant are o valoare minimă şi această valoare se obține când $\overline{M}_N$=0. În acest caz $\overline{M}_O = \overline{M}_R$ şi este paralel cu vectorul $\overline{R}$.

Torsorul alcătuit din rezultanta $\overline{R}$ şi momentul minim $\overline{M}_{min} = \overline{M}_R$ se numeşte torsor minimal.

$$\tau_{min} = \begin{Bmatrix} \overline{R} \\ \overline{M}_{min} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \\ \overline{M}_{min} \end{Bmatrix} \tag{2.25}$$

Expresia lui $\overline{M}_{min}$ se determină făcând produsul dintre mărimea acestuia, dată de 2.22 şi versorul $\overline{i}_R$ al vectorului rezultant

$$\overline{M}_{min} = M_{min}\overline{i}_R = M_R\overline{i}_R = \frac{\overline{R}\overline{M}_0}{|\overline{R}|}\frac{\overline{R}}{|\overline{R}|} = \frac{\overline{R}\,\overline{M}_0}{R^2}\overline{R}$$

(2.26)

b) *axa centrală*

Axa centrală este locul geometric al punctelor din spațiu în care momentul rezultat are valoarea minimă. Pentru obținerea ecuației axei centrale se consideră un punct $P_{(x,\ y,\ z)}$ în care este satisfăcută condiția de torsor minimal. Se determină momentul în acest punct şi se pune condiția ca acest moment să fie coliniar cu $\overline{R}$.

$$\overline{M}_P = \overline{M}_O - \overline{OP} \times \overline{R} = M_{Ox}\overline{i} + M_{Oy}\overline{j} + M_{Oz}\overline{k} + \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x & y & z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix}$$

Ecuația axei centrale

$$\frac{M_{Ox} - yR_z + zR_y}{R_x} = \frac{M_{Oy} - zR_x + xR_z}{R_y} = \frac{M_{Oz} - xR_y + yR_z}{R_z} \qquad (2.27)$$

Denumirea de axă centrală se justifică prin expresiile ce apar în ecuațiile 2.26. fiecare egalitate considerată separat reprezintă o combinație liniară în variabilele x,y,z, egalată cu zero care este ecuația unui plan. Axa centrală este intersecția a două plane, deci o dreaptă.

2 5. Cazurile de reducere ale sistemelor de forțe

Pentru un sistem de forțe aplicat unui rigid presupunem că s-a făcut reducerea într-un punct oarecare şi s-a obținut un torsor

$$\tau_O = \begin{Bmatrix} \overline{R} \\ \overline{M}_O \end{Bmatrix}$$

Cazurile de reducere sunt situații distincte când una sau ambele componente ale torsorului de reducere se anulează.
Se disting:

Cazul I:

$$\tau_O = \begin{Bmatrix} \overline{R} = 0 \\ \overline{M}_O = 0 \end{Bmatrix}$$

Sistemul de forțe este în echilibru şi se numeşte *sistem echivalent cu zero*.

Cazul II:

$$\tau_O = \begin{Bmatrix} \overline{R} = 0 \\ \overline{M}_O \neq 0 \end{Bmatrix}$$

Sistemul este *echivalent cu un cuplu* ce acționează într-un plan perpendicular pe $\overline{M}_O$. Sistemul tinde să imprime corpului o mişcare de rotație pupă o axă paralelă cu vectorul $\overline{M}_O$.

Cazul III:

$$\tau_O = \begin{Bmatrix} \overline{R} \neq 0 \\ \overline{M}_O = 0 \end{Bmatrix}$$

Sistemul este *echivalent cu o forță unică* $\overline{R}$ aplicată în polul de reducere (suportul rezultantei este axă centrală şi trece prin polul de reducere). Sistemul tinde să imprime corpului o mişcare de translație rectilinie.

Cazul IV:

$$\tau_O = \begin{Bmatrix} \overline{R} \neq 0 \\ \overline{M}_O \neq 0 \end{Bmatrix}$$

Se disting două subcazuri:

IV a) $\overline{R} \cdot \overline{M}_O = 0$;

Sistemul este *echivalent cu o forță unică* $\overline{R}$ *situată pe axa centrală*. $\overline{M}_O$□˜ arată că axa nu trece prin polul O dar este perpendiculară pe $\overline{M}_O$.

IV b) $\overline{R} \cdot \overline{M}_O \neq 0$;

Sistemul este *echivalent cu torsorul minimal aplicat pe axa centrală* compus dintr-o forță $\overline{R}$ şi un cuplu $[\overline{F}, -\overline{F}, d]$ care acționează într-un plan normal pe axa centrală iar brațul cuplului dat de

$$d = \frac{|\overline{M}_{min}|}{|\overline{F}|} \tag{2.28}$$

Sistemul are tendința de a imprima rigidului o mişcare de elicoidală în jurul axei centrale.

2 6. Reducerea sistemelor particulare de forțe

Dintre toate sistemele particulare de forțe un interes deosebit îl prezintă sistemele de forțe paralele. Se consideră un astfel de sistem în care toate forțele sunt paralele cu un versor $\overline{u}$, (Fig. 2.10).

v

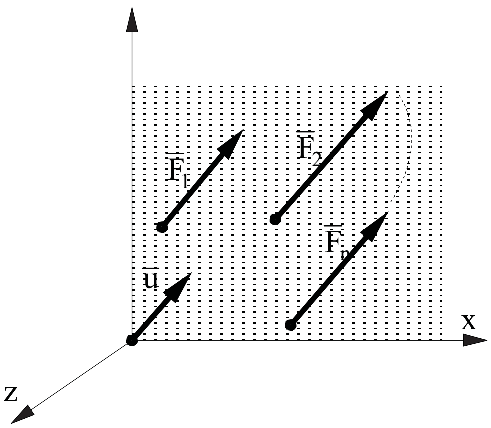


Figura 2.10

$$
\begin{aligned}
&\overline{F}_k = F_k \cdot \overline{u}\,,\quad k=1,\dots n\\
&\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k = \sum_{k=1}^{n} F_k \overline{u} = \overline{u}\left(\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k\right)\\
&\overline{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k \times \overline{F}_k = \sum_{k=1}^{n} (\overline{r}_k \times F_k \overline{u}) = \left[\sum_{k=1}^{n} (F_k \overline{r}_k)\right] \times \overline{u}\\
&\tau_O = \begin{Bmatrix} \overline{R} \\ \overline{M}_O \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overline{u} \cdot \sum_{k=1}^{n} F_k \\ \left(\sum_{k=1}^{n} F_k \overline{r}_k\right) \times \overline{u} \end{Bmatrix}
\end{aligned}
\qquad (2.29)
$$

Din relațiile 2.29 reiese că:

- vectorul rezultant $\overline{R}$ este coliniar cu versorul $\overline{u}$ iar mărimea sa este egală cu suma algebrică a scalarilor tuturor forțelor.
- vectorul moment rezultant este perpendicular pe fiecare din forțele sistemului. deoarece

$$
\overline{R} \cdot \overline{M} = \left[\overline{u} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} F_k\right)\right] \cdot \left[\sum_{k=1}^{n} (F_k \overline{r}_k) \cdot \overline{u}\right] = 0
$$

Cazuri de reducere

Cazul I:

$$\tau_O = \begin{Bmatrix} \overline{R} = 0 \\ \overline{M}_O = 0 \end{Bmatrix}$$

Sistemul de forțe dat este echivalent cu zero (echilibru).

Cazul II:

$$\tau_O = \begin{Bmatrix} \overline{R} = 0 \\ \overline{M}_O \neq 0 \end{Bmatrix}$$

Sistemul de forțe este echivalent cu un cuplu de moment $\overline{M}_O$.

Cazul III:

$$\tau_O = \begin{Bmatrix} \overline{R} \neq 0 \\ \overline{M}_O = 0 \end{Bmatrix}$$

Sistemul de forțe dat este echivalent cu o forță unică $\overline{R}$ situată pe axa centrală care trece prin polul de reducere.

Cazul IV:

$$\tau_O = \begin{Bmatrix} \overline{R} \neq 0 \\ \overline{M}_O \neq 0 \end{Bmatrix}$$

Sistemul de forțe care se reduce la o forță unică aplicată pe axa centrală şi nu trece prin polul de reducere.

Axa centrală se determină din condiția ca în punctele acesteia momentul rezultant să fie nul. Fie P un punct de pe axa centrală. În acest caz :

$$\overline{M}_p = \overline{M}_O - \overline{OP} \times \overline{R} = 0$$

Cu expresiile lui $\overline{M}_O$ şi ale lui $\overline{R}$ din (2.29)

$$\left[\sum_{k=1}^{n}\left(F_k \bar{r}_k\right)\right] \times \bar{u} - \bar{r} \times \bar{u}\left(\sum_{k=1}^{n} F_k\right) = 0$$
$$\left(\sum_{k=1}^{n} F_k \bar{r}_k\right) \times \bar{u} - \left(\bar{r} \cdot \sum_{k=1}^{n} F_k\right) \times \bar{u} = 0 \qquad (2.30)$$
$$\left[\sum_{k=1}^{n} F_k \bar{r}_k - \bar{r} \cdot \sum_{k=1}^{n} F_k\right] \cdot \bar{u} = 0$$

Produsul vectorial este nul când vectorii sunt coliniari. Adică :

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k \bar{r}_k - \bar{r} \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k = \alpha \bar{u}\ ;$$ □.- un scalar oarecare

$$\overline{OP} = \bar{r} = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k \bar{r}_k}{\sum_{k=1}^{n} F_k} - \frac{\alpha}{\sum_{k=1}^{n} F_k} \bar{u}$$

Cu notațiile

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k \bar{r}_k}{\sum_{k=1}^{n} F_k}\ ; \qquad \lambda = \frac{\alpha}{\sum_{k=1}^{n} F_k}$$

ecuația axei centrale devine

$$\bar{r} = \bar{r}_C + \lambda \bar{u} \qquad (2.31)$$

Ecuația (2.29) este ecuația unei drepte ce trece prin punctul de vector de poziție $\bar{r}_c$ și are direcția caracterizată de versorul $\bar{u}$.

Punctul C poartă numele de centru al forțelor paralele. Considerând că $C(\xi, \eta, \zeta)$ coordonatele acestuia se obțin din proiectarea pe axe a ecuației vectoriale.

$$\bar{r}_C = \xi \bar{i} + \eta \bar{j} + \zeta \bar{k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k (x_k \bar{i} + y_k \bar{j} + z_k \bar{k})}{\sum_{k=1}^{n} F_k} \tag{2.32}$$

sau prin proiecțiile pe axe

$$\xi = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k F_k}{\sum_{k=1}^{n} F_k}; \; \eta = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k F_k}{\sum_{k=1}^{n} F_k}; \; \zeta = \frac{\sum_{k=1}^{n} z_k F_k}{\sum_{k=1}^{n} F_k} \tag{2.33}$$

Proprietăți ale centrului forțelor paralele:

a) poziția centrului forțelor paralele nu se modifică dacă toate forțele sistemului se rotesc în acelaşi sens. (deoarece expresia lui $\bar{r}_C$ nu depinde de $\bar{u}$)

b) poziția centrului forțelor paralele nu se modifică dacă modulele forțelor se amplifică cu un scalar nenul. (rezultă imediat din expresiile 2.33)

c) poziția centrului forțelor paralele nu depinde de sistemul de referință ales, fiind o caracteristică intrinsecă a sistemului. Într-un alt sistem de referință, (Fig. 2.11), există relațiile:

$$\bar{r}'_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} \bar{r}'_k F_k}{\sum_{k=1}^{n} F_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} (\bar{r}_O + \bar{r}'_k) F_k}{\sum_{k=1}^{n} F_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \bar{r}_O F_k}{\sum_{k=1}^{n} F_k} + \frac{\sum_{k=1}^{n} \bar{r}'_k F_k}{\sum_{k=1}^{n} F_k} = \bar{r}_O + \bar{r}_c$$

Vectorul de poziție al centrului forțelor paralele se modifică ca şi vectorul de poziție al unui punct oarecare A_K. O aplicație imediată este determinarea poziției centrului de greutate. Dacă se consideră că pe întreaga masă a corpului accelerația gravitațională este constantă ca mărime şi direcție (notată cu $\bar{g}$). Pentru un sistem de puncte materiale m_K situate în punctele de vectori de poziție $\bar{r}_K$ coordonatele centrului de greutate G are expresiile:

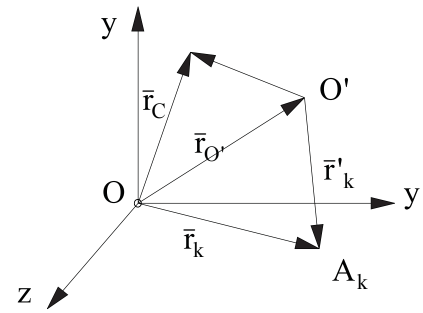


Figura 2.11

$$x_G = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k m_k}{M}; \quad y_G = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k m_k}{M}; \quad z_G = \frac{\sum_{k=1}^{n} z_k m_k}{M}; \quad M = \sum_{k=1}^{n} m_k \tag{2.35}$$

Pentru sistemele cu distribuție continuă a masei, sumele devin integrale iar poziția centrului de greutate va fi dată de:

$$x_G = \frac{\int_V x\,dm}{M}; \; y_g = \frac{\int_V y\,dm}{M}; \; z_g = \frac{\int_V z\,dm}{M}; \quad \text{unde} \quad M = \int_V dm \tag{2.36}$$

unde V este volumul ocupat de corpul cu masă distribuită continuu.

III. Statica rigidului

3.1 Statica rigidului liber

Un rigid se numeşte liber dacă poziţia sa este determinată numai de forţele exterioare $\overline{F}_k = X_k\overline{i} + Y_k\overline{j} + Z_k\overline{k},\ k = 1,2,...,n$ ce acţionează asupra lui. Condiţia de echilibru a rigidului liber este ca torsorul forţelor aplicate să fie nul. Matematic:

$$\tau_0 = \begin{Bmatrix} \overline{R} \\ \overline{M}_0 \end{Bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \overline{R} = 0 \\ \overline{M}_0 = 0 \end{cases} \qquad (3.1)$$

Ecuaţiile 3.1 proiectate pe axele de coordonate furnizează un sistem de şase ecuaţii scalare:

$$\sum_{k=1}^{n} X_k = 0\,;\ \sum_{k=1}^{n} Y_k = 0 \qquad \sum_{k=1}^{n} Z_k = 0 \qquad (3.2)$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{x_k} = 0\,;\ \sum_{k=1}^{n} M_{y_k} = 0\,; \qquad \sum_{k=1}^{n} M_{zk} = 0 \qquad (3.3)$$

În cazul unui sistem de forţe plan componentele forţelor nenule numai după axele O_x şi O_y iar toate momentele lor vor fi paralele ş totodată perpendiculare pe planul forţelor. De aici concluzia că ultima ecuaţie de proiecţie a forţelor ţi primele două ecuaţii de momente vor fi identic verificate. Rămân de satisfăcut ecuaţiile:

$$\sum_{k=1}^{n} X_k = 0\,, \qquad \sum_{k=1}^{n} Y_k = 0\,, \qquad \sum_{k=1}^{n} M_{zk} = 0\,. \qquad (3.3$$

`)

3.2 Numărul de grade de libertate ale unui rigid liber

Experiența arată că poziția unui rigid este complet determinată dacă se cunosc poziția a trei puncte necoliniare $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$, $A_3(x_3,y_3,z_3)$. Aparent poziția rigidului ar fi determinată de cele nouă coordonate ale acestor puncte. Aceste coordonate nu sunt independente. Datorită condiției de corp rigid distanțele dintre cele trei puncte trebuie să invariabile.

$$\begin{cases} d_1 = A_1A_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \\ d_2 = A_2A_3 = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2} \\ d_3 = A_3A_1 = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2} \end{cases} \tag{3.4}$$

Între cei nouă parametri există trei relații de legătură (3,4). Rămân numai şase parametri independenți. Aceşti parametri se numesc *grade de libertate*. Spre exemplu, dacă raportăm mişcarea rigidului la un sistem cartezian aceste grade de libertate se vor materializa prin posibilitatea executării a trei rotații şi a trei translații în jurul şi respectiv în lungul fiecărei axe.

În cazul în care rigidul este liber în plan, din cele şase mişcări nu vor mai putea fi executate:

- translația după direcția perpendiculară pe plan,
- două rotații în jurul a două axe perpendiculare conținute în plan.

Astfel rigidul în plan poate executa două translații după două axe perpendiculare cuprinse în plan şi o rotație după o axă perpendiculară pe plan. În concluzie, un rigid în plan are trei grade de libertate.

Problemele staticii rigidului liber presupun:

- determinarea poziției de echilibru când se cunosc forțele aplicate
- determinarea forțelor ce trebuie să acționeze asupra rigidului astfel ca acesta să ocupe la echilibru o anumită poziție.

În ambele cazuri trebuie analizată posibilitatea de rezolvare a problemei existând şi posibilitatea incompatibilității sau a nedeterminării.

3.3 Statica rigidului liber supus la legături fără frecare

Rigidul supus la legături căruia i se impune o anumită restricție geometrică (ex. un punct al rigidului să rămână pe o suprafață, pe o curbă sau fix). Şi aici ca şi în cazul punctului material se aplică axioma legăturilor: *orice legătură poate fi îndepărtată şi înlocuită cu elemente corespunzătoare (forțe, cupluri) numite forțe de legătură sau reacțiuni astfel ca rigidul sub acțiunea forțelor efectiv aplicate şi a reacțiunilor să poată fi considerat liber*.

Se consideră un rigid supus la legături, Fig.3.1, contactul făcându-se în punctul O.

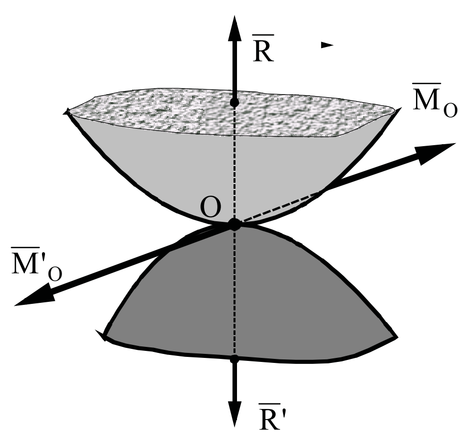


Figura 3.1

Torsorul de reducere în O al forțelor exterioare aplicate este:

$$\tau_O = \begin{Bmatrix} \overline{R} \\ \overline{M}_O \end{Bmatrix} \tag{3.5}$$

iar după suprimarea legăturilor şi introducerea reacțiunilor, torsorul acestora va fi

$$\tau`_O = \begin{Bmatrix} \overline{R}` \\ \overline{M}`_O \end{Bmatrix} \tag{3.5'}$$

Condiția de echilibru va fi ca:

$$\tau_O + \tau`_O = 0 \tag{3.6}$$

Torsorul de reducere al reacțiunilor adunat cu torsorul forțelor aplicate să dea torsorul nul. Mai explicit condițiile de echilibru se scriu:

$$\begin{cases} \overline{R} + \overline{R}` = 0 \\ \overline{M}_O + \overline{M}`_O = 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

Ecuațiile (3.7) proiectate pe axe conduc la şase ecuații scalare de echilibru.

3.4 Studiul legăturilor fără frecare ale rigidului.

Apar două aspecte în studiul legăturilor ideale:

- aspectul geometric care se ocupă de numărul de grade de libertate suprimate de legătură

- aspectul mecanic care se ocupă de caracterizarea reacțiunilor ce trebuie introduse după eliminarea legăturii.

Reazemul simplu

Un rigid este simplu rezemat când un punct al său este obligat să rămână permanent pe o suprafață sau pe o curbă. Aspectul geometric. Considerând punctul de contact unul din cele trei puncte A_1, A_2, A_3 necesare poziționării. Din cele nouă coordonate pe lângă satisfacerea celor trei condiții de rigiditate (3.4) coordonatele punctului de contact mai trebuie să satisfacă ecuația suprafeței.(încă o condiție). Rezultă că un reazem simplu suprimă un grad de libertate ,rigidului îi mai rămân astfel cinci grade de libertate.

Aspectul mecanic :în punctul de contact se duce planul tangent şi normala (unic determinată) şi dreptele $\overline{Ot_1}$ la intersecția planului tangent cu planul definit de normală şi rezultanta R şi dreapta $\overline{Ot_2}$ la intersecția dintre planul tangent şi planul determinat de normală şi momentul rezultant $\overline{M_O}$, (Fig. 3.2).

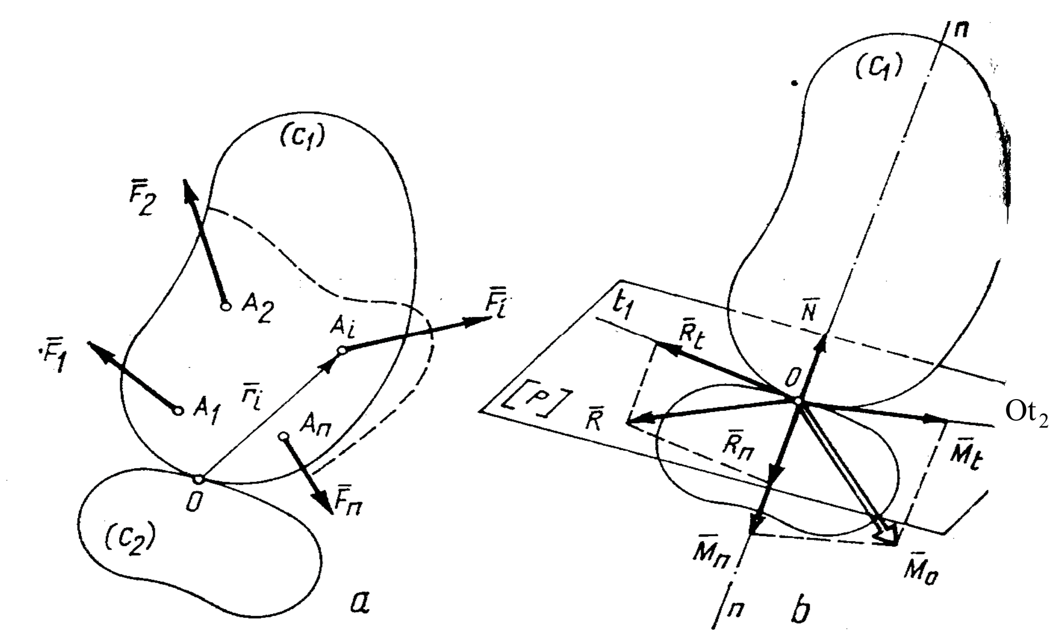


Figura 3.2

Se descompun rezultanta şi momentul rezultantei astfel:

$$\begin{cases} \overline{R} = \overline{R}_n + \overline{R}_t \,, \\ \overline{M}_0 = \overline{M}_n + \overline{M}_t \,. \end{cases}$$

$$\overline{R}_n \| On\,,\quad \overline{R}_t \|\ Ot_1\,,\ \overline{M}_n \| On\,,\quad \overline{M}_t \|\ Ot_2\,,$$

$\overline{R}_n$ tinde să deplaseze corpul (C_1) după normală. Conform principiului acţiunii şi reacţiunii corpul (C_2) răspunde cu forţă egală şi de sens contrar $\overline{N}$;

$\overline{R}_n$ tinde să deplaseze corpul (C_1) în lungul dreptei Ot_1;

$\overline{M}_n$ tinde să rotească corpul (C_1) în jurul normalei On.

$\overline{M}_t$ tinde să rotească corpul (C_1) în jurul dreptei Ot_1;. Inexistenţa frecării face imposibilă oprirea acestor mişcări. *Din punct de vedere mecanic un reazem simplu se înlocuieşte cu o reacţiune normală* $\overline{N}$ *dirijată după normala comună în punctul de contact.* Pentru echilibru este necesar :

$$\begin{cases} \overline{R} + \overline{N} = 0, \\ \overline{M}_0 = 0.. \end{cases} \tag{3.8}$$

Ecuaţiile (3.8) proiectate pe axe (se alege axa Oz după normală) furnizează următoarele ecuaţii scalare:

$$Ox: \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} X_k = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} M_{kx} = 0; \end{cases} \quad Oy: \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} Y_k + R'_y = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} M_{kz} = 0; \end{cases} \quad Oz: \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} Z_k + N = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} M_{kz} = 0; \end{cases} \tag{3.9}$$

Relațiile (3.9) sunt valabile pentru cazul spațial. Pentru cazul plan se obțin ecuațiile:

$$\sum_{k=1}^{n} X_k = 0 \ldots\ldots\ldots \sum_{k=1}^{n} Y_k + V = 0 \ldots\ldots\ldots \sum_{k=1}^{n} M_{kz} = 0 \qquad (3.10)$$

Articulația este legătura prin care un punct al rigidului este obligat să ocupe permanent o poziție fixă. Articulația poate fi spațială (sferică) sau plană (cilindrică). .(Fig. 3.3 şi respectiv Fig 3.4)

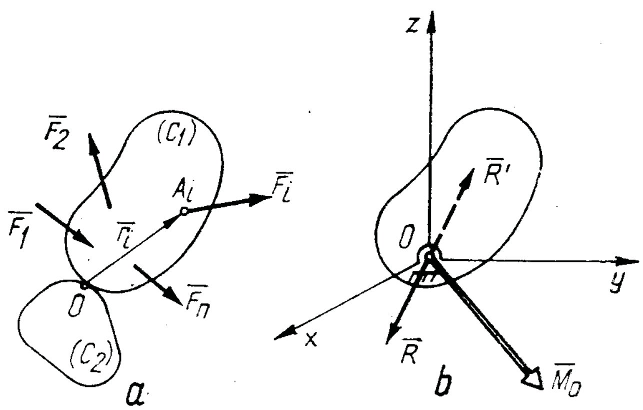


Figura 3.3

Aspectul geometric. Din cele nouă coordonate ale punctelor A_1, A_2, A_3, pe lângă condițiile de rigiditate, în cazul spațial se mai impun :

$$x_0 = ct. \quad y_0 = ct. \quad z_0 = ct. \qquad (3.11)$$

şi rezultă că *articulația sferică suprimă rigidului trei grade de libertate*. În cazul plan din cele trei grade de libertate se suprimă două astfel că mai rămâne un singur grad de libertate.

Aspectul mecanic. Se consideră două corpuri (C_1) şi (C_2) legate printr-o articulație. În punctul O torsorul de reducere al forțelor exterioare este alcătuit din rezultanta $\overline{R}$ şi vectorul moment rezultant $\overline{M_O}$. Momentul $\overline{M_O}$ tinde să rotească rigidul în jurul articulației. Lipsa frecării face ca oprirea acestei mişcări să fie imposibilă. Forța rezultantă $\overline{R}$ tinde să deplaseze corpul (C_1) de corpul (C_2).Condiția de păstrare a legăturii cere ca în articulație să apară o reacțiune $\overline{R}'$ astfel ca:

$$\overline{R}+\overline{R}'=0 \tag{3.12}$$

În cazul articulației sferice reacțiunea poate avea orice direcție şi trebuie înlocuită cu o forță de mărimea $\overline{R}'$ necunoscută şi orientare necunoscută. Astfel *o articulație sferică se înlocuieşte cu trei reacțiuni de mărimi necunoscute* R'_x, R'_y, R'_z *orientate după cele trei axe de coordonate*.

Ecuațiile vectoriale de echilibru proiectate pe axele de coordonate dau pentru articulația sferică:

$$\text{Ox:}\begin{cases}\sum_{k=1}^{n} X_k + R'_x = 0;\\ \sum_{k=1}^{n} M_{kx} = 0;\end{cases}\quad \text{Oy:}\begin{cases}\sum_{k=1}^{n} Y_k + R'_y = 0;\\ \sum_{k=1}^{n} M_{ky} = 0;\end{cases}\quad \text{Oz:}\begin{cases}\sum_{k=1}^{n} Z_k + R'_z = 0;\\ \sum_{k=1}^{n} M_{kz} = 0;\end{cases} \tag{3.13}$$

Mărimea R′ şi orientarea reacțiunii (cosinuşii directori) ai reacțiunii din articulație se termină cu relațiile:

$$R' = \sqrt{R'^2_x + R'^2_y + R'^2_z}\,;$$
$$\cos(\alpha) = \frac{R'^2_x}{R'};\quad \cos(\beta) = \frac{R'^2_y}{R'};\quad \cos(\gamma) = \frac{R'^2_z}{R'};\qquad (3.14)$$

În cazul articulației cilindrice reacțiunea este cuprinsă în planul normal pe axa de rotație (fie Oz) şi trebuie înlocuită cu două reacțiuni H şi V de mărimi necunoscute şi paralele cu axele Ox şi Oy, (Fig.3.4).

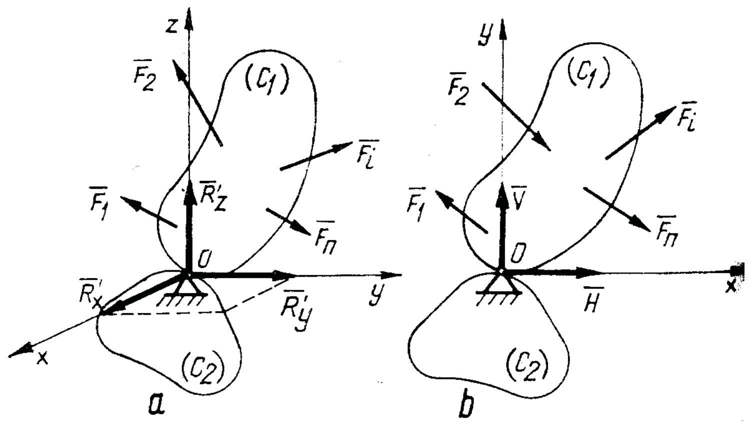


Figura 3.4

Pentru articulația cilindrică ecuațiile de echilibru sunt:

$$\sum_{k=1}^{n} X_k + H = 0 \ldots\ldots\ldots \sum_{k=1}^{n} Y_k + V = 0 \ldots\ldots\ldots \sum_{k=1}^{n} M_{kz} = 0 \qquad (3.15)$$

Mărimea şi orientarea reacțiunii necunoscute sunt date de:

$$R' = \sqrt{H^2 + V^2};\quad tg(\alpha) = \frac{V}{H}. \qquad (3.15')$$

Încastrarea este legătura în care rigidul pătrunde pe o porțiune oarecare într-un alt rigid fix astfel încât i se anulează orice mişcare. Aspectul geometric: însăşi definiția spune că încastrarea anulează toate gradele de libertate. Aspectul mecanic: Forțele exterioare se reduc într-un punct oarecare la un vector $\overline{R}$ și la un vector moment rezultant $\overline{M_O}$. Sub acțiunea forțelor aplicate se dezvoltă presiuni de contact în fiecare punct al suprafeței de contact. Aceste reacțiunii se reduc și ele la un torsor $\tau`_O$ de vector rezultant $\overline{R}`$ și un moment rezultant $\overline{M`_O}$.

Pentru echilibru trebuie ca:

$$\begin{cases} \overline{R} + \overline{R}' = 0; \\ \overline{M}_0 + \overline{M}'_0 = 0. \end{cases} \tag{3.16}$$

Înlocuirea unei încastrări se face prin introducerea unei reacțiuni $\overline{R}`$ și a unui moment $\overline{M`_O}$, ambele de mărime și direcție necunoscute. Ecuațiile de echilibru vor fi:

$$\text{Ox:} \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} X_k + R'_x = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} M_{kx} + M'_x = 0; \end{cases} \quad \text{Oy:} \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} Y_k + R'_y = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} M_{ky} + M'_y = 0; \end{cases} \quad \text{Oz:} \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} Z_k + R'_z = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} M_{kz} + M'_z = 0; \end{cases} \tag{3.17}$$

Pentru cazul plan:

$$\sum_{k=1}^{n} X_k + H = 0 \square .... \sum_{k=1}^{n} Y_k + V = 0 \square .... \sum_{k=1}^{n} M_{kz} + M = 0\,\tilde{} \tag{3.18}$$

Prinderea cu fire. Este echivalentă cu rezemarea unilaterală pe o sferă (deoarece firele nu pot suporta decât tensiuni de întindere). Prin urmare firul se înlocuieşte cu o forţă dirijată în lungul său, având sensul astfel încât să întindă porţiunea de fir legată de rigid. Reducerea se numeşte tensiune în fir. Se menţionează că un rigid poate fi prins cu un număr de şase fire în cazul spaţial şi trei fire în cazul plan.

3 5. Echilibrul rigidului supus la legături cu frecare

Frecarea este un fenomen complex care se caracterizează prin apariţia unor forţe şi a unor momente ce se opun întotdeauna mişcării relative dintre două corpuri. Natura fenomenului constă în deformabilitatea corpurilor reale şi imposibilitatea realizării contactului punctiform. Pe suprafaţa de contact a corpurilor se dezvoltă o distribuţie de presiune de contact cu variaţie deosebit de complexă şi foarte dificil de determinat. O altă cauză ar consta în asperităţile de pe suprafeţele ce mărginesc corpurile reale. Aceste asperităţi se întrepătrund în momentul formării contactului şi la orice mişcare relativă între corpuri se deformează până la rupere.

Se consideră două corpuri (C_1) şi (C_2) care fac un contact teoretic în punctul O, (Fig. 3.5).

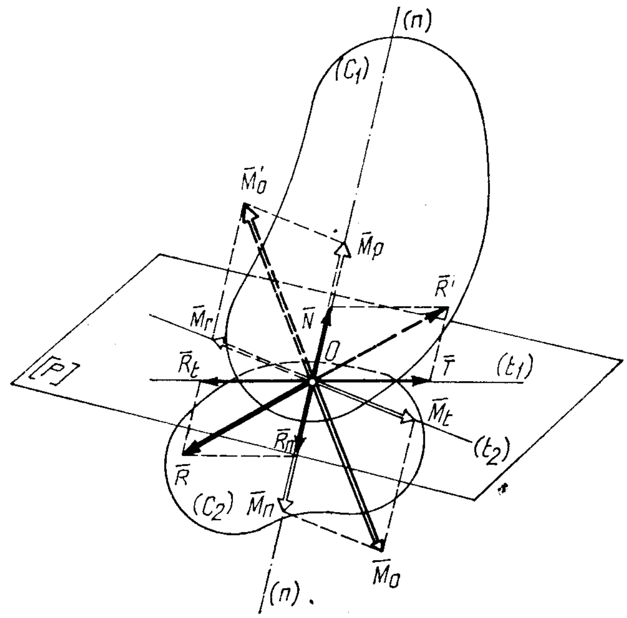


Figura 3.5

Corpul (C_1) este solicitat de un sistem de forțe exterioare care redus în O formează torsorul de reducere al forțelor exterioare alcătuit din vectorul rezultant $\overline{R}$ şi vectorul moment $\overline{M_O}$. În punctul O se construieşte planul tangent şi normala în punctul de contact. În planul tangent se consideră dreptele Ot_1 la intersecția planului tangent cu planul determinat de vectorul $\overline{R}$ şi de normală şi de Ot_2 la intersecția planului tangent cu planul determinat de vectorul $\overline{M_O}$ şi normală. Rezultanta $\overline{R}$ se descompune după direcția normală şi dreapta Ot_1 iar momentul rezultant M după direcția Ot_2. Au loc relațiile:

$$\overline{R} = \overline{R}_n + \overline{R}_t; \qquad (\overline{R}_n \| On,\ \overline{R}_t \| Ot_1),$$

$$\overline{M}_0 = \overline{M}_n + \overline{M}_t; \qquad (\overline{M}_n \| On,\ \overline{M}_t \| Ot_2)\ .$$

Torsorul de reducere în 0 al forțelor de legătură este format din vectorul $\overline{R}`$ şi momentul $\overline{M`_O}$. Ecuațiile de echilibru al rigidului sunt:

$$\begin{cases} \overline{R} + \overline{R}' = 0; \\ \overline{M}_0 + \overline{M}'_0 = 0. \end{cases} \tag{3.19}$$

Reacțiunea $\overline{R}`$ se descompune astfel:

$$\overline{R}' = \overline{N} + \overline{T}. \tag{3.20}$$

unde

$\overline{N}$ - reacțiune normală (se opune desfacerii legăturii),

$\overline{T}$ - forță de frecare de alunecare (se opune alunecării în lungul dreptei Ot_1),

iar momentul $\overline{M`_O}$

$$\overline{M}'_0 = \overline{M}'_p + \overline{M}'_r. \qquad \overline{M}'_p \| On,\ \overline{M}_r \| Ot_2), \tag{3.21}$$

unde:

$\overline{M}'_p$ - moment de frecare de pivotare (se opune rotației în jurul normalei),

$\overline{M}'_r$ - moment de frecare de rostogolire (se opune rotației în jurul dreptei Ot_2).

Ecuațiile de echilibru 3.19 mai pot fi scrise:

$$\begin{cases} \overline{R}_n + \overline{N} = 0; \\ \overline{R}_t + T = 0; \\ \overline{M}_n + \overline{M}_0 = 0; \\ \overline{M}_t + \overline{M}_r = 0. \end{cases} \tag{3.22}$$

3 6. Caracterizarea torsorului frecărilor

3.6 1 Frecarea de alunecare

Se presupune corpul (C_1) rezemat simplu în O pe corpul (C_2), (Fig. 3.6).

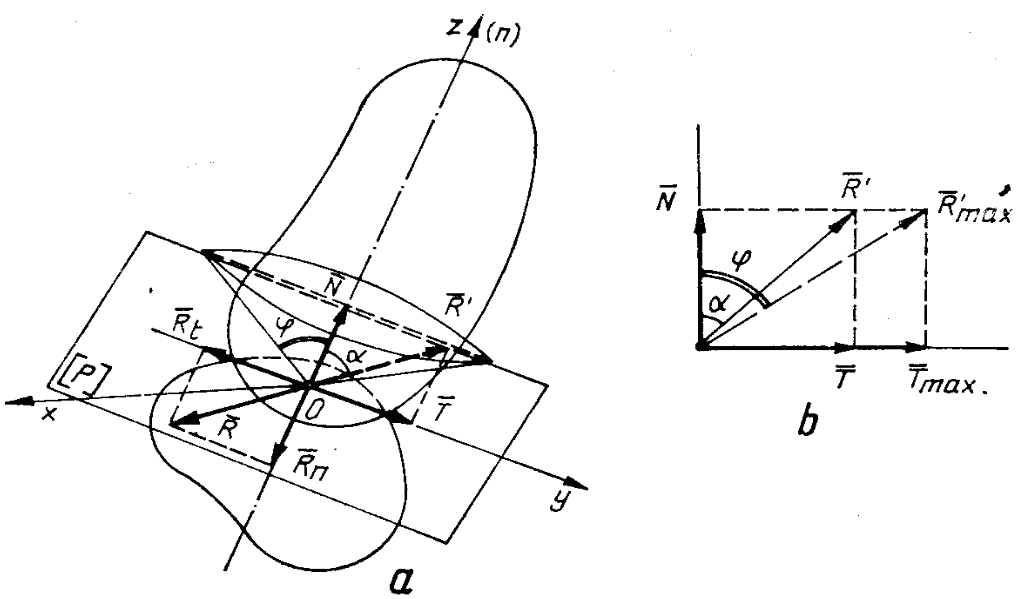


Figura 3.6

Torsorul de reducere al forțelor exterioare care solicită rigidul (C_1) se presupune alcătuit numai din rezultanta $\overline{R} = \overline{R_n} + \overline{R}_t$.

$$\tau_0 = \left\{ \begin{array}{l} \overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \\ \overline{M}_0 = 0 \end{array} \right\}. \quad 3.23$$

Principiul acţiunii şi reacţiunii impune ca reacţiunea R` să satisfacă relaţia:

$$\overline{R} + \overline{R}' = 0$$

unde

$$\overline{R}' = \overline{N} + \overline{T}.$$

În cazul echilibrului cu frecarea $\overline{R}$ este înclinată cu unghiul □. faţă de normala On, iar la limita cu □. Forţa de frecare la alunecare pentru echilibru este,

$$|\overline{T}| = |\overline{N}| \operatorname{tg}(\alpha), \quad (3.24)$$

iar la limită

$$|\overline{T}_{max}| = |\overline{N}| \operatorname{tg}(\varphi); \quad (3.25)$$

$$\mu = \operatorname{tg}(\varphi); \quad (3.26)$$

unde.μ este coeficientul de frecare de alunecare iar φ este unghiul de frecare. Au loc relaţiile

$|\overline{T}| \le \mu |\overline{N}|$, pentru echilibru, (3.27)

$$|T| = \mu|\overline{N}| \text{ pentru echilibru la limită.} \tag{3.28}$$

Forța de frecare are următoarele caracteristici:

- direcția cuprinsă în planul tangent în punctul de contact;
- sensul opus mişcării relative;
- mărimea depinde de natura corpurilor şi de starea suprafețelor;
- mărimea ei nu poate depăşi o valoare limită.

Ecuațiile vectoriale de echilibru:

$$\begin{cases} \overline{R} + \overline{R}' = 0; \\ \overline{M}_0 = 0. \end{cases} \tag{3.29}$$

Ecuațiile vectoriale (3.29) furnizează şase ecuații de proiecții (Axa Oz se alege dirijată după normala On). Ecuațiile scalare de proiecție sunt:

$$\text{Ox: } \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} X_k = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} M_{kx} = 0; \end{cases} \quad \text{Oy: } \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} Y_k + T = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} M_{ky} = 0; \end{cases} \quad \text{Oz: } \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} Z_k + N = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} M_{kz} = 0; \end{cases} \tag{3.30}$$

Acestora li se adaugă condiția de existență a echilibrului de frecare de alunecare.

$$T \le \mu N. \tag{3.31}$$

Observații:

Soluția unei probleme în care apare frecare nu mai este unică, datorită inegalității (3.31) vor exista zone în care aceasta va fi satisfăcută.

3.6.2 Frecarea de rostogolire

Corpul (C_1) se sprijină pe corpul (C_2), (Fig. 3.7)

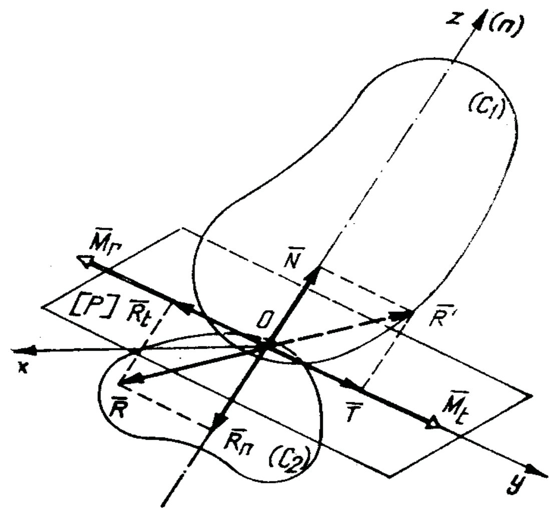


Figura 3.7

iar torsorul de reducere al forțelor exteriore în punctul teoretic de contact este:

$$\tau_0 = \begin{Bmatrix} \overline{R} = \overline{R}_N + \overline{R}_t; \\ \overline{M}_0 = \overline{M}_t. \end{Bmatrix}. \qquad (3.32)$$

Torsorul de reducere al forțelor de legătură în acest punct este:

$$\tau'_0 = \begin{Bmatrix} \overline{R} = \overline{N} + \overline{T}; \\ \overline{M}'_0 = \overline{M}_r. \end{Bmatrix}. \qquad (3.33)$$

iar ecuațiile de echilibru vor fi:

$$\begin{cases} \overline{R} + \overline{R}' = 0; \\ |\overline{M}_t| \leq |\overline{M}_r|. \end{cases} \tag{3.34}$$

Cuplul $\overline{M_t}$ tinde să rostogolească rigidul în jurul axei Oy din planul tangent. Acestuia i se opune cuplul $\overline{M_r}$ (momentul de rostogolire). Experimental s-a constatat că valoarea momentului $\overline{M_r}$ nu poate depăşi o anumită valoare limită. Această valoare maximă se exprimă prin relația:

$$|M_{r\,max|} = s|\overline{N}|. \tag{3.35}$$

s – coeficient de frecare de rostogolire cu dimensiunea unei lungimi. Pentru echilibru trebuie satisfăcută condiția:

$$|\overline{M}_r| \leq s|\overline{N}|. \tag{3.36}$$

Proiectând pe axele sistemului Oxyz ecuațiile vectoriale de echilibru se obțin:

$$\text{Ox:} \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} X_k = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} M_{kx} = 0; \end{cases} \quad \text{Oy:} \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} Y_k + T = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} M_{ky} + M_r = 0; \end{cases} \quad \text{Oz:} \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} Z_k + N = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} M_{kz} + M = 0; \end{cases} \tag{3.37}$$

la care trebuie adăugată inegalitatea 3.36.

$$M_r \leq sN. \tag{3.38}$$

Explicația apariției frecării de rostogolire constă în deformabilitatea corpurilor. Se consideră o roată cilindrică de greutate $\overline{G}$ şi care este în contact cu o suprafață plană (Fig. 3.8). Considerând roata nedeformabilă şi că nu există frecare de alunecare, din a doua ecuație de proiecție a forțelor reiese că orice forță $\overline{F}$ cât de mică care acționează orizontal în centrul roții va pune în mişcare roata. Experiența infirmă aceste concluzie. În realitate are loc o deformare a şinei şi pe suprafața respectivă de contact apare o distribuție elementară de forțe de contact $\overline{p_k}$. Aplicarea forței $\overline{F}$ face ca distribuția de presiune să devină asimetrică iar torsorul de reducere al forțelor aplicate se reduce în punctul inițial de contact O la o rezultantă $\overline{R}$ şi la un moment rezultant M_O. În cazul echilibrului la limită s (coeficientul de frecare de rostogolire reprezintă

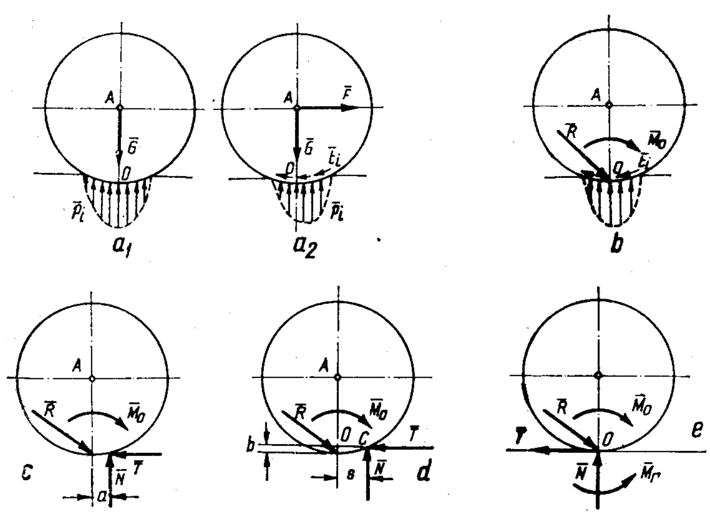


Figura 3.8

distanța maximă cu care se deplasează reacțiunea normală față de verticala centrului roții). Distanța b dintre suprafața șinei și punctul cel mai de pe periferie se poate neglija. Coeficientul de frecare de rostogolire poate fi interpretat ca fiind distanța maximă cu care se poate deplasa din punctul teoretic de contact suportul reacțiunii normale M, paralel cu el însuși astfel încât rigidul să nu se rostogolească. În problemă intervin atât forța de frecare $\overline{T}$ cât și momentul de frecare de rostogolire $\overline{M_r}$. Pe lângă ecuațiile de echilibru (3.37) trebuie să adăugăm inecuațiile caracteristice frecării.

$$|T| \leq \mu|\overline{N}|; \ |\overline{M}_r| \leq s|N|. \tag{3.39}$$

În funcție de modul de satisfacere a celor două inegalități pot apărea următoarele situații:

$$|\overline{M}_r| \leq s|\overline{N}|; \ |\overline{T}| \leq \mu|N|. \text{ repaus.}$$

$$|\overline{M}_r| > s|\overline{N}|; \ |\overline{T}| \leq \mu|N|. \text{ rostogolire fără alunecare.}$$

$$|\overline{M}_r| \leq s|\overline{N}|; \ |\overline{T}| > \mu|N|. \text{ alunecare fără rostogolire.}$$

$$|\overline{M}_r| > s|\overline{N}|; \ |\overline{T}| > \mu|N|. \text{ alunecare și rostogolire simultane.} \tag{3.40}$$

3.6.3 Frecarea de pivotare

Se consideră un rigid (C_1) simplu rezemat pe un alt rigid (C_2), (Fig. 3.9), al cărui torsor de reducere al forțelor exterioare în punctul teoretic de contact

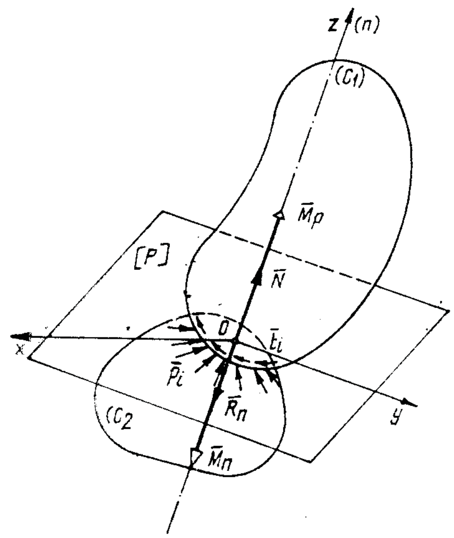


Figura 3.9

$$\tau_0 = \begin{Bmatrix} \overline{R} = \overline{R}_n \\ \overline{M}_0 = \overline{M}_n . \end{Bmatrix}. \tag{3.41}$$

Deoarece torsorul de reducere în acelaşi punct O al forţelor de legătură este:

$$\tau'_0 = \begin{Bmatrix} \overline{R}' = N \\ \overline{M}_0 = \overline{M}_p \end{Bmatrix}. \tag{3.42}$$

Condiţiile de echilibru sunt:

$$\begin{cases} \overline{R} + \overline{R}' = 0; \\ \overline{M}_0 + \overline{M}_p = 0. \end{cases} \tag{3.43}$$

Cuplul de pivotare este produs de forțele tangente de frecare de alunecare $|\overline{t_i}| = \mu|\overline{p_i}|$ ce apar pe suprafața de contact a celor două corpuri. Reducerea lor în punctul teoretic de contact conduce la un vector moment de reacțiune $\overline{M_p}$ perpendicular pe planul tangent. Experimental s-a constatat că mărimea momentului de pivotare nu poate depăşi o valoare maximă care depinde de natura corpurilor în contact şi mărimea reacțiunii normale.

$$|\overline{M}_{p\,max}| \le \nu|\overline{N}|. \tag{3.44}$$

. ˜ .coeficientul de frecare de pivotare cu dimensiunea unei lungimi.

Pentru echilibru trebuie îndeplinită condiția:

$$|\overline{M}_p| \le \nu|\overline{N}|. \tag{3.45}$$

La ecuațiile de proiecție pe axe ale ecuațiilor vectoriale de echilibru 3.43 va trebui să adăugăm inecuația 3.45. Astfel pentru un rigid ce are tendința de pivotare avem:

$$\text{Ox:}\ \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} X_k = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} M_{kx} = 0; \end{cases} \quad \text{Oy:}\ \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} Y_k = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} M_{ky} = 0; \end{cases} \quad \text{Oz:}\ \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} Z_k + N = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} M_{kz} + M_p = 0; \end{cases}$$

$$M_p \le \nu N. \tag{3.46}$$

IV Analiza structurală a mecanismelor

4.1Element cinematic. Cuple cinematice. Definiţii. Clasificare

Se numeşte *element cinematic* un rigid sau un ansamblu de rigide între care nu există mişcare relativă (Exemplu o roată dinţată montată pe un arbore prin intermediul unei pene care să împiedice rotaţia relativă dintre arbore şi roată).

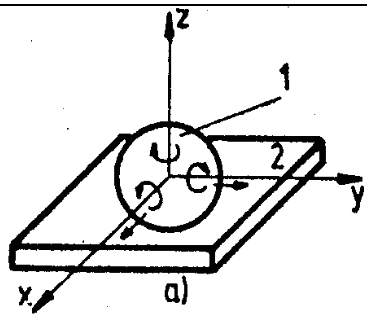
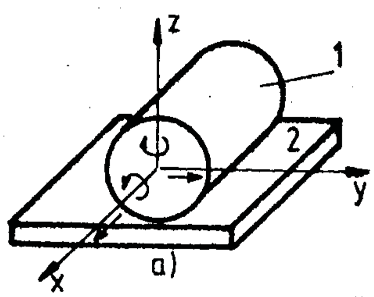
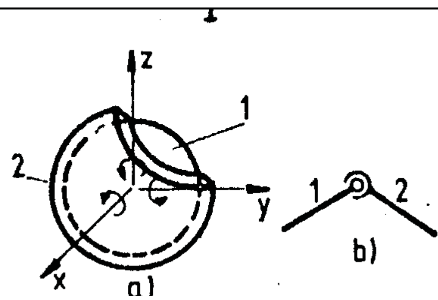
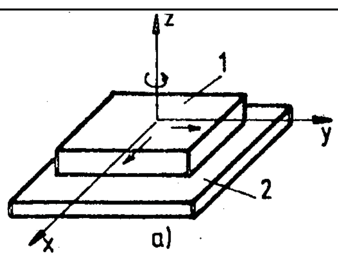
Cupla cinematică reprezintă legătura mobilă directă şi permanentă dintre două elemente cinematice.

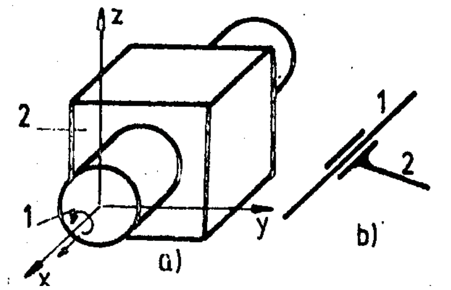
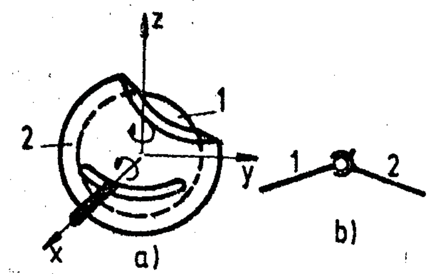
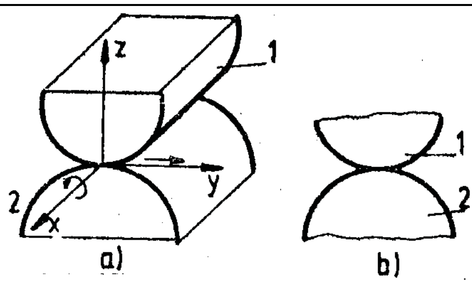
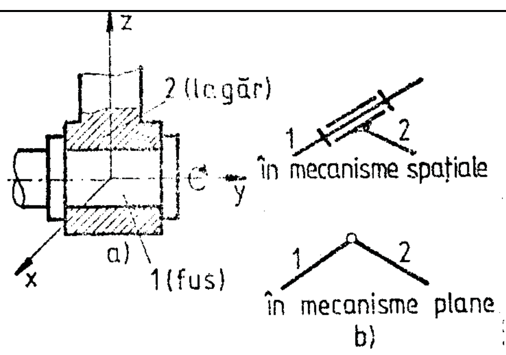
Clasificarea cuplelor cinematice se va face după mai multe criterii:

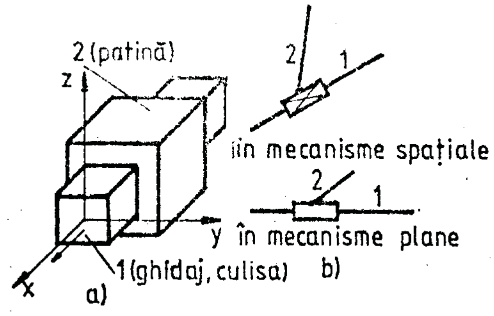
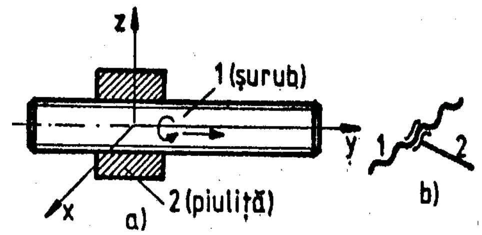
- după *numărul gradelor de libertate anulate*, cuplele se clasifică în *clase*. Clasa unei cuple poate lua valori între 1 şi 5. Cupla de clasă zero presupune că rigidul după formare cuplei îşi păstrează caracterul de rigid liber. Cupla de clasă 6 presupune că după formarea contectului între cele două elemente nu mai există mişcare relativă (cele două elemente se confundă într-unul singur).
- după natura contactului dintre cele două elemente:
  a. cuple *superioare*, când contactul se realizează după un punct sau curbă
  b. cuple *inferioare*, când contactul se realizează după o suprafaţă
- după caracterul mişcării relative dintre elemente:
  a. cuple *plane* – mişcarea relativă este plan paralel
  b. cuple *spaţiale* – mişcare relativă spaţială
- după modul de asigurare al contactului dintre elemente:
  a. cuple *unilaterale* – menţinerea legăturii se face prin forţa asigurată de elemente clasice (arcuri)
  b. cuple *bilaterale* – menţinerea contactului se face constructiv şi nu există posibilitatea întreruperii contactului.

În TABELUL 4.1 se prezintă principalele tipuri de cuple întâlnite în tehnică şi clasificarea acestora după criteriile enumerate mai sus.

TABELUL 4.1

Nr.	Reprezentare constructivă	a) Denumire b) Descriere	Clasificare
1		a) b) contact sferă/plan	clasa I superioară spaţială deschisă
2		a) b) cilindru/plan	clasa II superioară spaţială deschisă
3		a) cuplă sferică, articulaţie sferică b) contact sferă/cavitate sferică	clasa III inferioară spaţială închisă
4		a) - b) contact plan/plan	clasa III inferioară plană deschisă

5		a) cuplă cilindrică b) contact cilindru circular /cavitate cilindrică de acelaşi diametru	clasa IV inferioară spaţială închisă
6		a) cuplă sferică cu deget b) se obţine din cupla sferică legând de sfera 1 o tijă cilindrică (deget) care pătrunde într-un canal practicat ân elementul 2	clasa IV inferioară spaţială închisă
7		a) b) contactul dintre două suprafeţe cilindrice necirculare dupăo generatoare comună. Mişcările admise se fac numai în planul perpendicular pe axele cilindrilor	clasa V inferioară plană închisă
8		a) cuplă de rotaţie , articulaţie b) se obţine din cupla cilindrică prin anularea deplasării relative în lungul axei comune	clasa V inferioară plană închisă

9		a) cuplă de translație b) contact între suprafața lateralăa unei prisme şi o cavitate prismatică de aceeaşi secțiune	clasa V inferioară plană închisă
10		a) cupla şurub piuliță b) contactul între două suprafețe elicoidale identice. Deplasarea axială este proporțională cu rotația relativă	clasa V inferioară spațială închisă

4.2 Lanț cinematic. Mecanism. Familie. Grad de libertate

Prin *lanț cinematic* se înțelege o înşiruire de elemente cinematice legate între ele prin cuple cinematice. Prin *rangul* unui element cinematic se înțelege numărul de cuple pe care elmentul le formează cu alte elemente cinematice. Lanțurile cinematice sunt simple când rangul elementelor sale este maxim doi, (Fig. 4.1a, Fig. 4.1b), şi complexe când există şi elemente de rang superior lui doi. (Fig. 4.1c). Când conțin şi elemente de rangul unu lanțurile cinematice sunt deschise, (Fig. 4.1a).

Pe schema unui lanț cinematic cuplele se notează cu litere latine mari iar elementele cu cifre.

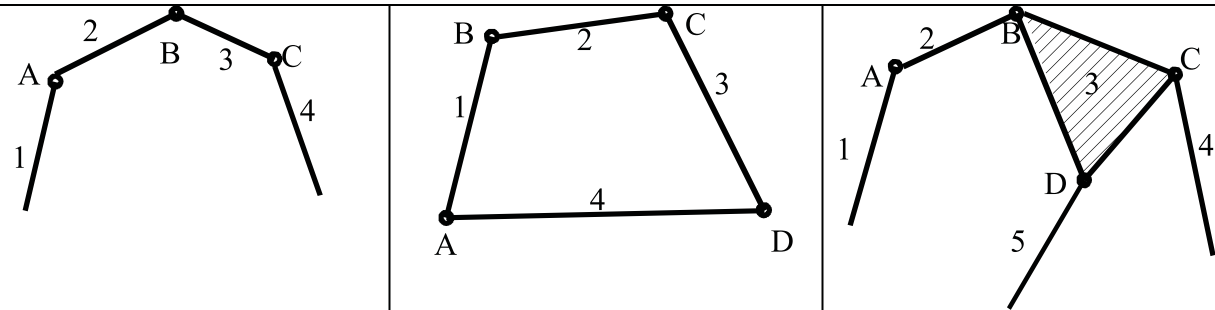


Figura 4.1

Mecanismul este un lanţ cinematic care îndeplineşte trei condiţii:

- este închis;
- are un element fix numit batiu;
- are un număr de elemente conducătoare stabilit astfel încât poziţia oricărui element este bine determinată.

Prin *grad de libertate* se înţelege numărul de parametri independenţi care determină complet poziţia tuturor elementelor. *Gradul de mobilitate* este gradul de libertate intern, conceput în ipoteza că unul din elementele lanţului este solidar cu sistemul de referinţă. Pentru calculul gradului de libertate (mobilitate) din totalul gradelor de libertate ale elementelor lanţului (mecanismului) trebuie scăzut numărul de grade de libertate anulate de cuple cinematice pe care aceste elemente le realizează. Pentru a face corect acest lucru trebuie introdusă noţiunea de familie introdusă de Dobrovolski.

Familia unui lanţ cinematic este egală cu numărul de mişcări simple interzise tuturor elementelor lanţului cinematic. În cazul mecanismului definiţia se referă la elementele mobile. Pentru determinarea familiei se utilizează un tabel în care sunt trecute mişcări simple pe care le poate efectua un rigid liber în spaţiu (trei rotaţii ţi trei translaţii) şi se analizează posibilităţiile de mişcare ale fiecărui element al lanţului faţă de un sistem de referinţă ortogonal ales convenabil. Tabelul trebuie să aibă 6 coloane iar numărul de linii trebuie să fie egal cu cel al elementelor mobile, (Fig. 4.2.)

	t_x	t_y	t_z	r_x	r_y	r_z
1	+	+	–	+	–	+
2	+	+	–	+	–	+
….						
…..						

n	+	+	-	+	-	-

Figura 4.2

Analizând mişcarea fiecărui element în raport cu sistemul de referinţă ales se trece în tabel semnul + dacă mişcarea este permisă şi – dacă este interzisă. După analiza mişcării tuturor elementelor numărul de coloane care conţin numai semnul – este egalat cu familia lanţului.

Spre exemplu un lanţ cinematic plan este de familie trei deoarece elementele sale nu se pot deplasa după normala la planul mişcării şi se pot roti în jurul a două axe perpendiculare din planul mişcării. Un rigid liber are 6 grade de libertate. Un element cinematic ce intră în structura unui lanţ cinematic de familie f are 6-f grade de libertate. O cuplă de clasă k (k=1,5) nu va mai anula k mişcări simple ale elementului cinematic ci (k-f). Dacă se consideră că lanţul cinematic conţine n elemente, c_k cuple cinematice de clasă k şi este de familie f, relaţia pentru gradul de libertate L_f este:

$$L_f = (6-f)n - \sum_{k=f+1}^{5}(k-f)c_k, \qquad (4.1)$$

iar pentru gradul de mobilitate M_f numărul elementelor se reduce cu o unitate şi:

$$M_f = (6-f)(n-1) - \sum_{k=f+1}^{5}(k-f)c_k, \qquad (4.2)$$

Relaţiile 4.1 şi 4.2 permit o concluzie importantă: *un lanţ cinematic nu poate conţine cuple de clasă mai mare sau egală cu familia sa.* Calculul gradului de mobilitate al uni mecanism arată câte cuple conducătoare trebuie să conțină mecanismul pentru a avea o mişcare determinată.

O categorie importantă de mecanisme sunt mecanismele plane care au familie egală cu trei relațiile 4.1 şi 4.2 se particularizează pentru acest caz astfel:

$$L_3 = 3n - c_4 - 2c_5, \tag{4.3}$$

$$M_3 = 3(n-1) - c_4 - 2c_5. \tag{4.4}$$

Grupă structurală. Definiție. Exemple. Clasificare

Prin *grupă structurală* se înțelege un lanț cinematic plan, care conține numai cuple inferioare şi care îndeplineşte condițiile:

- numărul de grupe conducătoare este egal cu gradul de libertate
- nu pot fi descompuse în grupe structurale mai simple

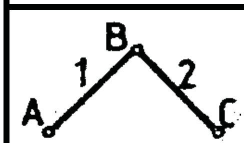
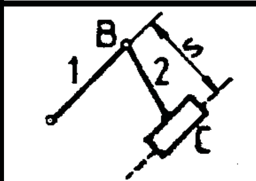
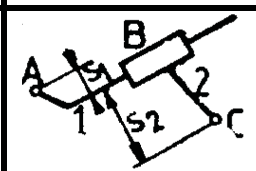
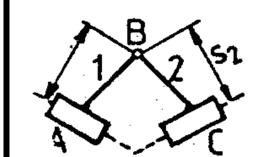
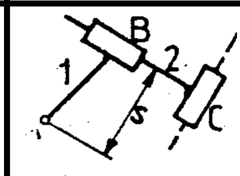
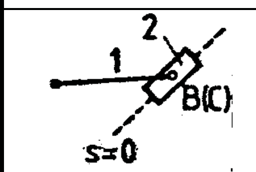
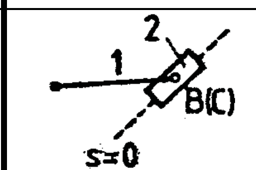
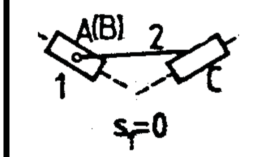
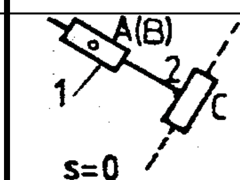
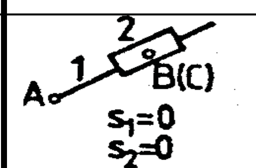
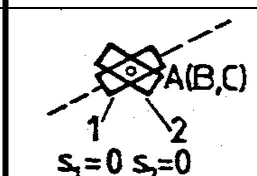
Când $L \geq 1$ grupele se numesc conducătoare; iar pentru $L = 0$ grupele se numesc grupe Assur. Grupele Assur sunt importante deoarece introducerea sau scoaterea unei astfel de grupe în structura unui lanț cinematic nu modifică fradul de libertate al acestuia. Grupele Assur sunt structuri statistic determinate şi au avantajul că pot fi studiat separat de restul mecanismului. Din condiția de definiție a grupelor Assur rezultă ecuații în numere întregi.

$$3n - 2c_5 = 0 \tag{4.5}$$

a cărei soluții sunt:
n=2 şi se numesc diade, n=4 şi se numesc tetrade ş.a.m.d. În studiul mecanismelor plane cele mai studiate sunt diadele.

Într-un lanț cinematic plan cuplele inferioare (de clase C_5) pot fi numai de translație (T) sau de rotație (R) funcție de poziția acestora în structura diadei deosebim cinci aspecte ale diadei care sunt prezentate în TABELUL 4.2.

TABELUL 4.2

Aspectul 1	Aspectul 2	Aspectul 3	Aspectul 4	Aspectul 5
				
Aspecte simplu degenerate				
Aspecte dublu degenerate				

În tabel se prezintă şi aspectele degenerate care când două cuple sunt suprapuse. Diada de aspect TTT nu există deoarece acest lanț este de familie 4 şi nu mai răspunde condiției 4.5.

Grupele Assur se clasifică în clase şi ordine.

Clasa unei grupe este egală cu:

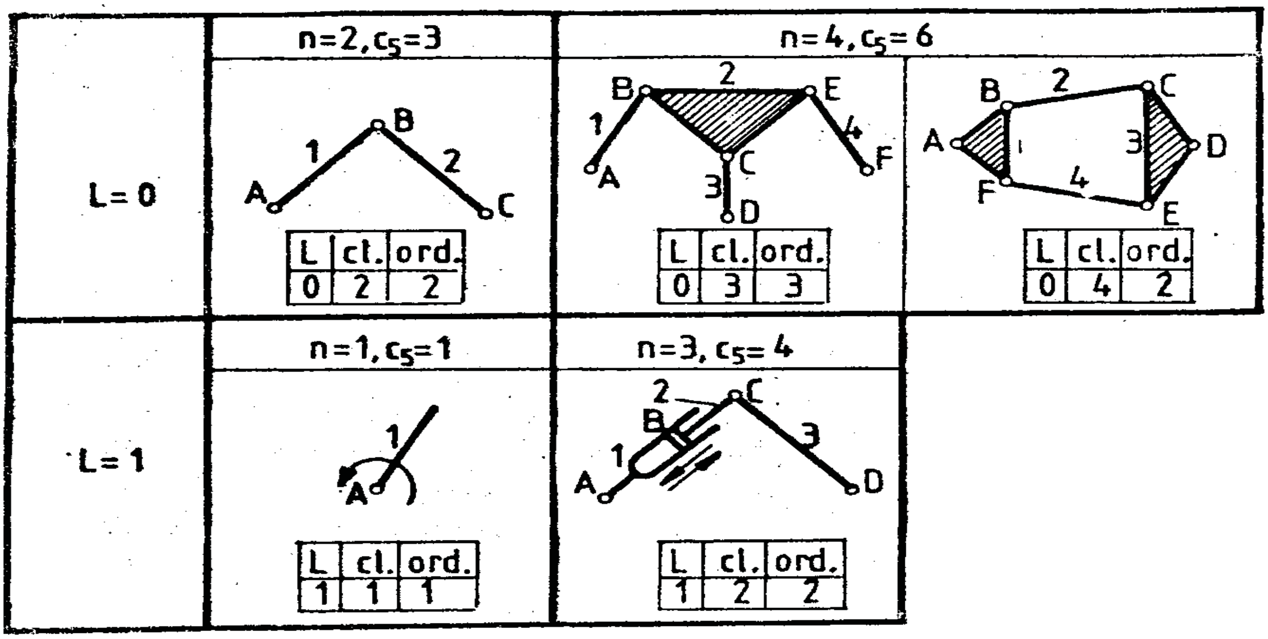
- numărul de lanțuri ale celui mai întins contur închis format cu elementele grupei (când există contururi închise);

- cu cel mai înalt rang al elementelor lanțului dacă acesta nu conține contururi închise.

Ordinul unei grupe structurale este egal cu numărul de cuple exterioare (cu care grupa se poate lega în exterior). În TABELUL 4.3 se prezintă grupele structurale de diferite clase şi ordine.

După cum se observă, numărul grupelor structurale este relativ mic. Cu aceste grupe se pot realiza mecanisme cu complexitate ridicată prin legarea succesivă de grupe structurale.

TABELUL 4.3



În procesul de analiză este necesară descompunerea mecanismelor în grupe structurale componente. Pentru aceasta se desfac legăturile şi se îndepărtează elementele conducătoare cu cuple conducătoare aferente. Ceea ce rămâne este un lanţ cinematic cu grad de libertate nul care poate fi constituit din una sau mai multe grupe structurale. Răspunsul la această întrebare presupune o oarecare experienţă. Din lanţul după îndepărtarea elementelor şi cuplelor conducătoare se încearcă extragerea unei anumite grupe Assur mai simplă, dar în aşa fel încât ceea ce rămâne să fie tot una sau mai multe grupe Assur legate dacă se reuşeşte se continuă operaţiunea. În caz contrar lanţul cinematic în cauză este o grupă Assur propriuzisă.

Se face observaţia că rezultatul descompunerii în grupe structurale depinde de elementele conducătoare alese. Acestea vor trebui, într-o situaţie concretă, specificată de la început.

4.3 Înlocuirea cuplei superioare

Pentru studiul unitar al mecanismelor plane a fost introdusă noţiunea de grupă structurală. Una din condiţiile de definiţie era ca în structura grupei structurale să intre numai cuple inferioare. Relaţia (4.3) pentru calculul gradului de libertate a lanţurilor cinematice plane indică prezenţa în structură şi a cuplelor de clasă C_4 care sunt cuple superioare.

Pentru a putea aplica în continuare metoda grupelor structurale este necesară înlocuirea cuplelor superioare care se întâlnesc în structura unui astfel de lanţ.

Înlocuirea se face respectând două condiţii:

- condiţia structurală cere ca după înlocuirea cuplei superioare gradul de libertate al lanţului să nu se modifice.
- condiţia cinematică cere ca mişcarea relativă dintre elementele ce formează cupla superioară să rămână aceeaşi

Fie un lanţ cinematic plan ce conţine n elemente, c_4 cuple superioare şi c_5 cuple inferioare. Se înlocuieşte una din cuplele superioare astfel ca după înlocuire noul lanţ cinematic va avea n′ elemente, c_4 cuple superioare şi c_5 cuple inferioare. Din condiţia studiată se ajunge la:

$$L_3 = 3n - c_4 - 2c_5 = 3n' - (c_4 - 1) - 2c'_5 \qquad (4.6)$$

de unde rezultă ecuaţia:

$$3(n - n') - 2(c_5 - c'_5) = 1. \qquad (4.7)$$

Soluţia cea mai simplă a ecuaţiei în numere întregi 4.7 este după cum se observă imediat

$$n' - n = 1; \quad c'_5 - c_5 = 2 \qquad (4.8)$$

Relațiile 4.8 arată că din punct de vedere structural o cuplă cinematică plană este echivalentă cu un element cinematic şi două cuple inferioare.

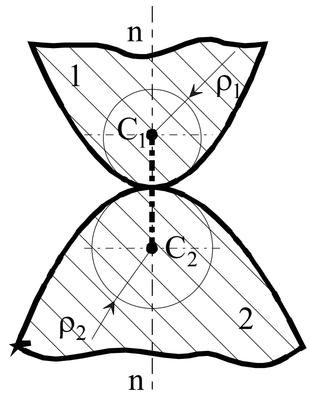
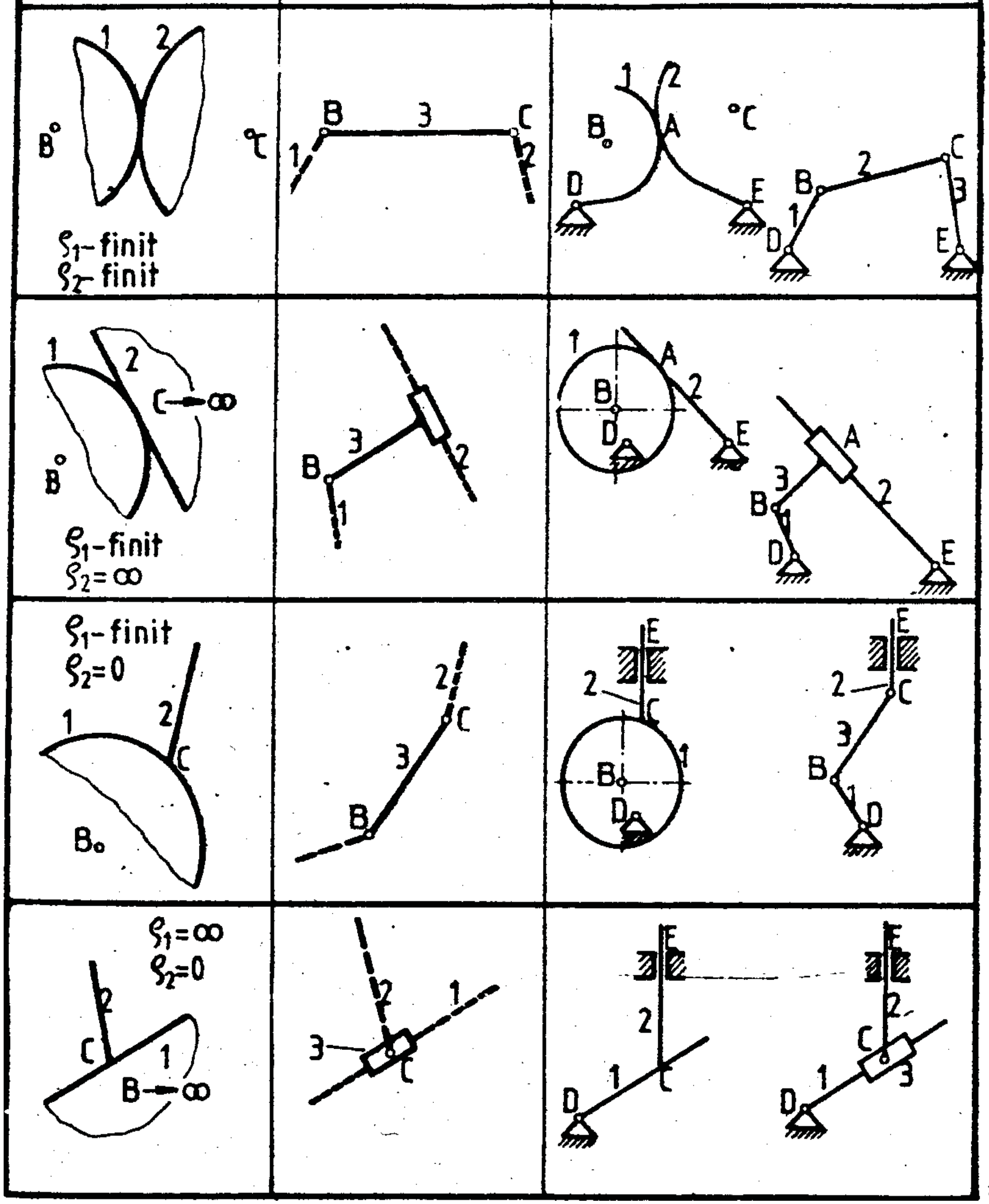


Figura 4.1

Prin condiția cinematică rezultă cum se face această înlocuire plană. Se consideră două elemente 1 şi 2 ce formează o cuplă superioară plană. În punctul de contact cele două curbe se pot înlocui cu două arce de cerc, (Fig. 4.1), ce au razele egale cu razele de curbură ale celor două curbe în punctul de contact (aceste centre se găsesc pe normala comună în punctul de contact). În cărțile de specialitate se arată că pentru a fi îndeplinită condiția cinematică lungimea elementului înlocuitor trebuie să aibă lungimea segmentului dintre cele două centre de curbură. Un caz particular apare când una din curbe este o dreaptă iar centrul său de curbură se află la infinit. În acest caz, spre deosebire de toate celelalte când pe capetele elementului înlocuitor se amplasează cuple de rotație, în locul cuplei de rotație se plasează o cuplă de translație cu direcția paralelă cu dreapta limitrofă. Înlocuirea cuplei superioare are, de obicei un caracter instantaneu deoarece razele de curbură se modifică. Există şi cazuri când înlocuirea are caracter permanent. Acest lucru se întâmplă când curbele ce limitează corpurile au raze de curbură constante. Aceste cazuri şi exemple de mecanisme în care apar sunt prezentate în TABELUL 4.4.

TABELUL 4.4

Cupla superioară	Lanțul cinematic înlocuitor	Exemplu



Deşi cazul $\rho_1 = \infty, \rho_2 = \infty$ îndeplineşte condiţia ca razele de curbură să fie constante, acest caz nu apare în tabel deoarece nu corespunde uni cuple superioare ci uneia inferioare. (Nu se poate preciza punctul în care se realizează contactul dintre cele două corpuri).

V Cinematica punctului material

5.1. Obiect. Traiectorie. Viteză. Accelerație

Cinematica este ramura mecanicii care studiază mişcarea corpurilor fără a lua în considerație cauzele mişcării. Noțiunile cu care operează cinematica sunt spațiul şi timpul. În cinematică se utilizează derivatele unor mărimi vectoriale ce sunt funcțiuni de timp. Fie $\overline{V}(t)$ un vector variabil.

Prin definiție derivata unui vector în raport cu timpul (notată cu un punct deasupra vectorului)

$$\frac{d\overline{V}}{dt} = \dot{\overline{V}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{V}(t+\Delta t) - \overline{V}(t)}{\Delta t} . \qquad (5.1)$$

Apar trei cazuri reprezentate în Fig. 5.1:

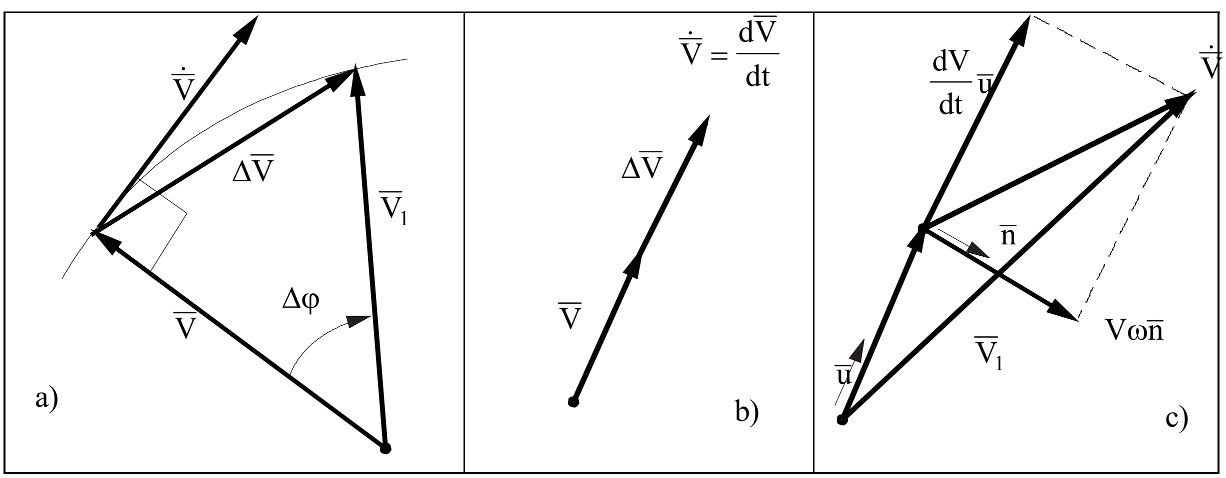


Figura 5.1

a) vectorul este variabil dar are modulul constant, (Fig. 5.1a).

derivata $\dot{\overline{V}}$ este un vector perpendicular pe $\overline{V}$ având modulul V□. unde $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ este viteza unghiulară a modulului. $\overline{v}$ în jurul originii sale.

b) vectorul are direcţie fixă şi modulul variabil. Derivata $\dot{\overline{V}}$ este un vector coliniar cu vectorul şi care are modulul egal cu derivata modulului vectorului iniţial, (Fig. 5.1b).

c) vectorul $\overline{V}$este variabil atât ca poziţie cât şi ca direcţie, (Fig. 5.1c)

derivata $\dot{\overline{v}}$ va avea două componente, una coliniară corespunzătoare variaţiei modulului şi una normală pe vector corespunzătoare direcţiei.

Noţiunile fundamentale ale cinematicii sunt *traiectoria, viteza şi acceleraţia.*

Poziţia unui punct în spaţiu este caracterizată de vectorul său de poziţie $\overline{r}$. Dacă acest vector este variabil în timp:

$$\overline{r} = \overline{r}(t). \qquad (5.2)$$

Această funcţie trebuie să satisfacă o serie de condiţii ca:

- continuitate,
- derivabilitate,
- uniformitate.

Necesitatea acestor condiţii va fi evidenţiată ulterior.

Traiectoria unui punct material este prin definiţie locul poziţiilor succesive ocupate de un punct material în mişcare. Legat de traiectorie apar două categorii de probleme:

- se cunoaşte variaţia funcţiilor scalare ce definesc vectorul de poziţie $\overline{r}$(t) şi se cere ecuaţia traiectoriei.

- se cunoaşte traiectoria şi se cere poziţia punctului la un moment dat.

Când traiectoria este impusă se ia de obicei drept parametru de poziţie al punctului pe curba dată, lungimea arcului de curbă notat cu s(t) măsurată de la punctul în care punctul material se află inițial,(Fig. 5.2).

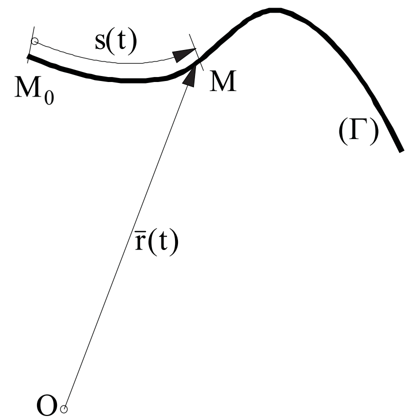


Figura 5.2

Coordonata $s = \widehat{OM_1}$ $s = arc(M_0M)$ este denumită coordonată curbilinie, iar dependența

$$s = s(t) \tag{5.3}$$

poartă denumirea de *ecuația orară* a mişcării.

Viteza reprezintă mărimea care caracterizează rapiditatea de mişcare a unui punct material. Viteza este un vector. Dacă poziția punctului este determinată de vectorul de poziție $\bar{r}$ atunci:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}} \,. \tag{5.4}$$

În cazul în care punctul se mişcă pe o curbă prestabilită, viteza se obține derivând prin intermediul lui s(t). (Punctul supraaliniat indică derivata în raport cu timpul a mărimii respective) Astfel:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt}\bar{\tau}. \qquad (5.5)$$

Considerând triedrul lui Frenet ataşat curbei, (Fig.5.3).

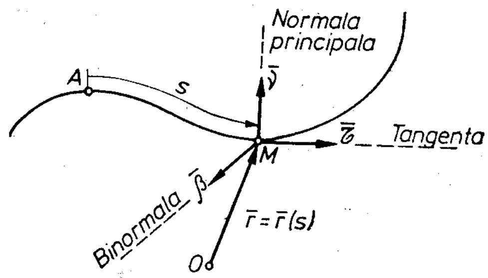


Figura 5.3

Din geometria diferenţială se ştie că

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{\tau}\,; \qquad (5.6)$$

unde $\bar{\tau}$ este versorul tangent la curbă în punctul considerat având sensul corespunzător creşterii lui s. Scalarul vitezei $\bar{v}$ se obţine din ecuaţia 5.5 calculând modulul ambilor membrii ai ecuaţiei.

$$v = \left|\frac{d\bar{r}}{ds}\right|\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \text{ deoarece } \left|\frac{d\bar{r}}{ds}\right| = |\bar{\tau}| = 1 \qquad (5.7)$$

Concluzie :*Viteza este tot timpul tangentă la traiectorie*. Dacă vectorul de poziţie este dat în coordonate carteziene ca funcţie de timp, anume:

$$\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$$

ecuaţia 5.4 dă pentru viteză:

$$\bar{v}(t) = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}} = \dot{x}(t)\bar{i} + \dot{y}(t)\bar{j} + \dot{z}(t)\bar{k} \qquad 5.8$$

Proiecțiile vitezei pe axe sunt:

$$v_x = \dot{x}; \quad v_y = \dot{y}; \quad v_z = \dot{z}$$

iar mărimea vitezei este:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$$

Accelerația este mărimea ce caracterizează variația în timp a vitezei.

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \dot{\bar{v}} = \frac{d^2x}{dt^2}\bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\bar{k} = \ddot{\bar{r}}\ . \qquad (5.9)$$

Când punctul se mişcă pe o curbă prestabilită din derivarea în raport cu timpul a relației 5.5 rezultă

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\bar{\tau}\frac{ds}{dt}\right) = \bar{\tau}\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d\bar{\tau}}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 . \qquad (5.10)$$

Dacă se ține seama de prima relație a lui Frenet:

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho}\bar{\upsilon}\ . \qquad (5.11)$$

unde $\overline{\upsilon}$ este versorul normalei principale la curbă îndreptat întotdeauna spre partea concavă a curbei, iar ρ este raza de curbură, relația 5.10 se poate scrie

$$\overline{a} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{\overline{\upsilon}}{\rho} + \frac{d^2s}{dt^2}\overline{\tau} = \overline{a}_\upsilon + \overline{a}_\tau \,. \qquad (5.12)$$

unde:

$$\overline{a}_\upsilon = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{\overline{\upsilon}}{\rho} = \frac{\dot{s}^2}{\rho}\overline{\upsilon} \qquad (5.13)$$

reprezintă accelerația normală, iar :

$$\overline{a}_\tau = \frac{d^2s}{dt^2}\overline{\tau} = \ddot{s}\overline{\tau} \,. \qquad (5.14)$$

este accelerația tangențială. Mărimea accelerației se obține cu ajutorul proiecțiilor pe axele triedrului natural.

$$a = \sqrt{a_\upsilon^2 + a_\tau^2} = \sqrt{\frac{\dot{s}^4}{\rho^2} + \ddot{s}^2} \,. \qquad (5.15)$$

Faptul că după direcția binormalei $\overline{\beta}$ accelerația nu are proiecție arată că accelerația este situată întotdeauna în planul osculator al curbei. Deasemeni, accelerația are o componentă normală îndreptată întotdeauna spre centrul de curbură şi o componentă tangențială al cărei sens coincide sau nu cu cel al versorului $\overline{\tau}$ după cum scalarul vitezei creşte respectiv scade în timp. În cazul coordonatelor carteziene, derivarea în raport cu timpul a ecuaţiilor 5.7 permit calculul acceleraţiei prin proiecţiile sale pe axele reperului cartezian.

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \dot{\bar{v}} = \frac{d^2x}{dt^2}\bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\bar{k} = \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k} \ . \qquad (5.16)$$

Mărimea acceleraţiei se determină cu proiecţiile sale

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \ . \qquad (5.17)$$

unde

$$a_x = \ddot{x}, \quad a_y = \ddot{y}, \quad a_z = \ddot{z}. \qquad (5.18)$$

Dimensiunea acceleraţiei este lungimea raportată la pătratul timpului şi se măsoară în [m/s^2]. În cazul mişcării unui punct dacă se aşează toţi vectorii corespunzători vitezei, respectiv acceleraţiei, cu originea într-un punct comun se obţin hodografele vitezei şi al acceleraţiei.

În funcţie de valorile şi a acceleraţiei mişcarea unui punct poate fi:

- mişcarea *rectilinie* (direcţia vitezei rămâne neschimbată).
- mişcarea *uniformă* (scalarul vitezei v este constant).
- \- mişcarea *uniformă variată* (scalarul acceleraţiei este constant).

Adesea este util a se exprima componentele vitezei şi a acceleraţiei în alte sisteme de coordonate decât cel natural sau cartezian. Ca aplicaţie se determină componentele vitezei şi acceleraţiei în coordonate polare. În cazul acestui sistem versorii $\overline{u_\rho}, \overline{u_\theta}$ sunt variabili, iar $\overline{u_z} = \bar{k}$. Din Fig. 5.4 se observă că:

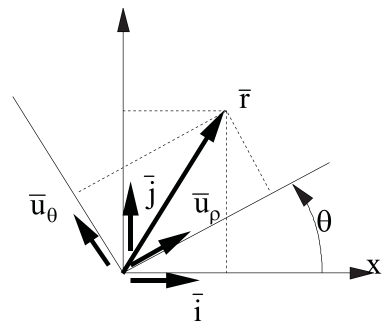


Figura 5.4

$$\bar{u}_\rho = \cos(\theta)\bar{i} + \sin(\theta)\bar{j};$$
$$\bar{u}_\theta = -\sin(\theta)\bar{i} + \cos(\theta)\bar{j}. \qquad (5.19)$$

Derivatele acestor vectori în raport cu timpul sunt

$$\dot{\bar{u}}_\rho = -\dot{\theta}\sin(\theta)\bar{i} + \dot{\theta}\cos(\theta)\bar{j} = \dot{\theta}\bar{u}_\theta,$$
$$\dot{\bar{u}}_\theta = -\dot{\theta}\cos(\theta)\bar{i} - \dot{\theta}\sin(\theta)\bar{j} = -\dot{\theta}\bar{u}_\rho. \qquad (5.20)$$

Vectorul de poziție $\bar{r}$ în coordonatele cilindrice este dat de:

$$\bar{r} = \rho\bar{u}_\rho + z\bar{k}.$$

Viteza în coordonatele cilindrice, proiecțiile şi mărimea ei sunt date de:

$$\overline{v} = \dot{\overline{r}} = \dot{\rho}\overline{u}_{\rho} + \rho\dot{\overline{u}}_{\rho} + \dot{z}\overline{k} = \dot{\rho}\overline{u}_{\rho} + \rho\dot{\theta}\overline{u}_{\theta} + \dot{z}\overline{k};$$

$$v_{\rho} = \dot{\rho}; \quad v_{\theta} = \rho\dot{\theta}; \quad v_{z} = z;$$

$$v = \sqrt{v_{\rho}^{2} + v_{\theta}^{2} + v_{z}^{2}} = \sqrt{\dot{\rho}^{2} + \rho^{2}\dot{\theta} + \dot{z}^{2}} \tag{5.21}$$

Accelerația

$$\begin{aligned} \overline{a} = \ddot{\overline{r}} &= \ddot{\rho}\overline{u}_{\rho} + \dot{\rho}\dot{\overline{u}}_{\rho} + \dot{\rho}\dot{\theta}\overline{u}_{\theta} + \rho\ddot{\theta}\overline{u}_{\theta} + \rho\dot{\theta}\dot{\overline{u}}_{\theta} + \ddot{z}\overline{k} = \\ &= \ddot{\rho}\overline{u}_{\rho} + \dot{\rho}\dot{\theta}\overline{u}_{\theta} + \dot{\rho}\dot{\theta}\overline{u}_{\theta} + \dot{\rho}\dot{\theta}\overline{u}_{\theta} - \rho\dot{\theta}^{2}\overline{u}_{\rho} + \ddot{z}\overline{k} = \\ &= (\ddot{\rho} - \rho\ddot{\theta})\overline{u}_{\rho} + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\overline{u}_{\theta} + \ddot{z}\overline{k} \end{aligned} \tag{5.22}$$

Proiecțiile vor fi:

$\overline{a}_{\rho} = \ddot{\rho} - \rho\ddot{\theta}$ componenta radială;

$\overline{a}_{\theta} = (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\overline{u}_{\theta}$; componenta tangențială;

$\overline{a}_{z} = \ddot{z}\overline{k}$; componenta axială. (5.23)

Modulul accelerației în coordonate cilindrice:

$$a = \sqrt{a_{\rho}^{2} + a_{\theta}^{2} + a_{z}^{2}} = \sqrt{(\ddot{\rho} - \rho\ddot{\theta})^{2} + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})^{2} + \ddot{z}^{2}} \tag{5.24}$$

5.2 Mişcări particulare ale punctului material.

5.2.1 Mişcarea rectilinie uniformă.

$$\overline{v} = v_{0}\overline{\tau}; \qquad v_{0} = \text{const}\,, \qquad \overline{\tau} = \overline{\text{const.}} \tag{5.25}$$

adică viteza punctului material este constantă atât ca mărime cât şi ca direcţie. Alegem axa Ox paralelă cu versorul $\bar{\tau}$. Direcţia vitezei este invariabilă .Rezultă:

$$v = v_0; \qquad \frac{ds}{dt} = \text{const.} \tag{5.26}$$

Prin integrare:

$$s(t) = v_0 t + s_0. \tag{5.27}$$

Concluzie: *Variaţia spaţiului se face proporţional cu timpul.*
Acceleraţia:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = 0 \tag{5.28}$$

În mişcarea uniformă acceleraţia este nulă. În această mişcare intervalul parcurge spaţii egale în intervale de timp egale.

5.2.2 Mişcarea rectilinie uniform variată.

O mişcare rectilinie uniform variată se caracterizează prin traiectoria rectilinie şi acceleraţia constantă. Se consideră că mişcarea se desfăşoară pe axa $Ox \equiv Os$ cu originea în 0.

$$\bar{a} = \bar{a}_\upsilon + \bar{a}_\tau = \ddot{s}\tau + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\bar{\upsilon}\ . \tag{5.29}$$

Datorită traiectorii rectilinii $\rho \to \infty$ rezultă $\bar{a}_\upsilon = \frac{\dot{s}^2}{\rho}\bar{\upsilon} \equiv 0$ iar

$$\bar{a} = \ddot{s}\bar{\tau}\ . \qquad (5.30)$$

Considerând proiecţia ecuaţiei 5.30 pe direcţia mişcării:

$$a = \dot{v} = \ddot{s} = \frac{d^2s}{dt^2} = \text{const.} \qquad (5.31)$$

Impunând condiţiile iniţiale, la t=0, spaţiul şi viteza să fie $s(0) = s_0, v(0) = v_0$, se obţin ecuaţiile vitezei şi acceleraţiei.

$$v = at + v_0;$$
$$a = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0. \qquad (5.33)$$

Din prima relaţie 5.33. se vede că în cazul acestei mişcări, viteza creşte cu cantităţi egale în intervale egale de timp. Eliminarea timpului din expresiile 5.33 conduce la formula lui Toricelli:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2a(s - s_0)}\ . \qquad (5.34)$$

Dependenţa spaţiului de timp este o funcţie pătratică (parabolică). Când :a > 0 mişcarea este *uniform accelerată* (parabola are ramurile în sus) şi când a < 0 mişcarea este *uniform încetinită* (parabola are ramurile în jos) . Diagramele vitezei şi spaţiului sunt în Fig. 5.5

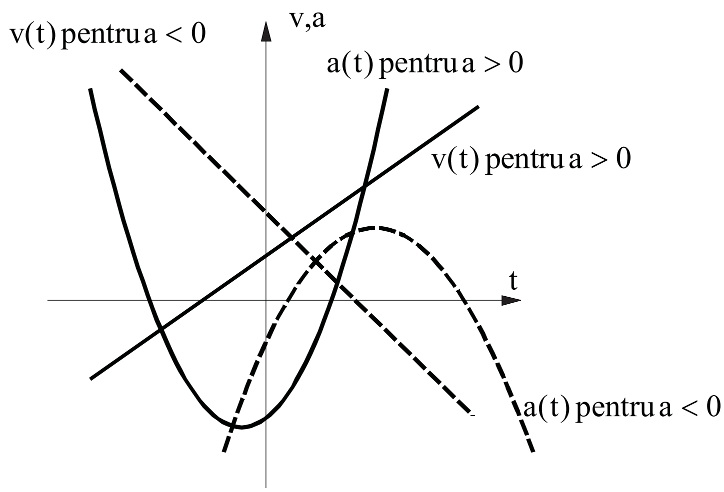


Figura 5.5

5.2.3 Mişcarea circulară.

O mişcare se numeşte circulară atunci când traiectoria este un cerc. Studiul mişcării va fi făcut în toate cele trei sisteme de coordonate prezentate (carteziene, naturale şi polare).

a) în sistemul de coordonate carteziene. Fig. 5.6

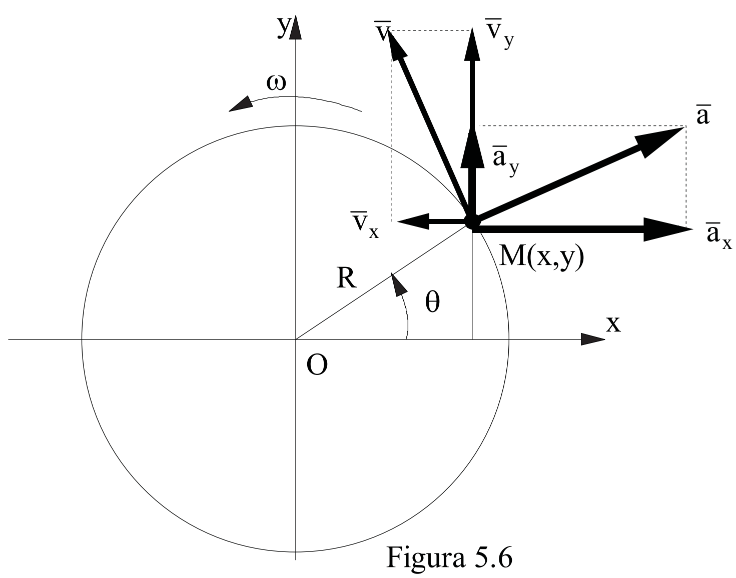


Figura 5.6

Poziția punctului M pe cercul de rază R este dată de unghiul θ care variază după legea:

$$\theta = \theta(t). \tag{5.35}$$

Ecuațiile parametrice ale traiectoriei sunt:

$$\begin{cases} x(t) = R\cos(\theta), \\ y(t) = R\sin(\theta). \end{cases} \tag{5.36}$$

Determinarea componentelor vitezei se face prin aplicarea relației 5.8.

$$\begin{aligned} v_x &= -R\sin(\theta)\,\dot{\theta} = -\omega R\sin(\theta), \\ v_y &= R\cos(\theta)\dot{\theta} = \omega R\cos(\theta). \end{aligned} \tag{5.37}$$

unde s-a notat cu:

$$\omega(t) = \dot{\theta}(t).$$

viteza unghiulară . Astfel:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = R\omega,$$

$$\overline{v} = -R\omega\sin(\theta)\overline{i} + R\omega\cos(\theta)\overline{j} = \omega(-y\overline{i} + x\overline{j}). \tag{5.38}$$

Viteza $\overline{v}$ este perpendiculară pe $\overline{r}$ deoarece $\overline{v}\cdot\overline{r} = 0$, după cum se poate verifica imediat.

Accelerația se obține prin derivarea celei de a doua relației (5.38)

$$\bar{a} = -R\dot{\omega}\sin(\theta)\bar{i} - R\omega^2\cos(\theta)\bar{i} + R\dot{\omega}\cos(\theta)\bar{j} - R\omega^2\sin(\theta)\bar{j} = \\ = -R\varepsilon\sin(\theta)\bar{i} - R\omega^2\cos(\theta)\bar{i} + R\varepsilon\cos(\theta)\bar{j} - R\omega^2\sin(\theta)\bar{j} \tag{5.39}$$

unde s-a notat cu:

$$\varepsilon(t) = \dot{\omega}(t) = \ddot{\theta}(t).$$

accelerația unghiulară. Proiecțiile pe axele Ox şi Oy.

$$a_x = \dot{v}_x = -R\varepsilon\sin(\theta) - R\omega^2\cos(\theta) = -y\varepsilon - x\omega^2, \\ a_y = \dot{v}_y = R\varepsilon\cos(\theta) - R\omega^2\sin(\theta) = x\varepsilon - y\omega^2 \tag{5.40}$$

iar mărimea ei

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{5.41}$$

b) Sistemul de coordonate natural (Frenet), (Fig. 5.7)

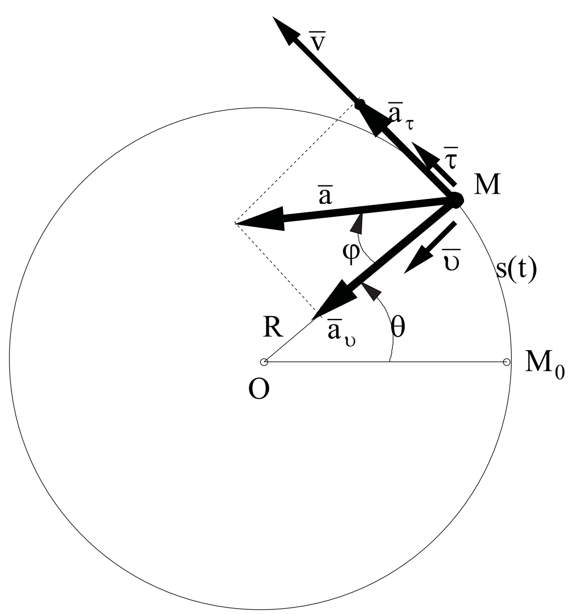


Figura 5.7

Ecuaţia orară a mişcării:

$$s = s(t) = R\theta. \tag{5.42}$$

Viteza se exprimă cu ajutorul relaţiei:

$$\overline{v} = \dot{s}\overline{\tau} = R\dot{\theta}\overline{\tau}\,, \tag{5.43}$$

iar mărimea acesteia este:

$$v = R\omega \tag{5.44}$$

Acceleraţia rezultă din aplicarea relaţiei 5.12

$$\overline{a} = \ddot{s}\overline{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\overline{\upsilon} = R\ddot{\theta}\overline{\tau} + \frac{R^2\omega^2}{R}\overline{\upsilon} = R\varepsilon\overline{\tau} + R\omega^2\overline{\upsilon}. \tag{5.45}$$

De aici:

$$a_\tau = R\varepsilon,\ a_\upsilon = R\omega^2, \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_\upsilon^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{5.46}$$

Unghiul de acceleraţie şi raza este dat de:

$$tg(\varphi) = \frac{a_\tau}{a_\upsilon} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \tag{5.47}$$

c) Sistemul de coordonate polare.

Sistemul de coordonate polare, (Fig. 5.8), este o particularizare a sistemului de coordonate cilindric pentru cazul z=ct..

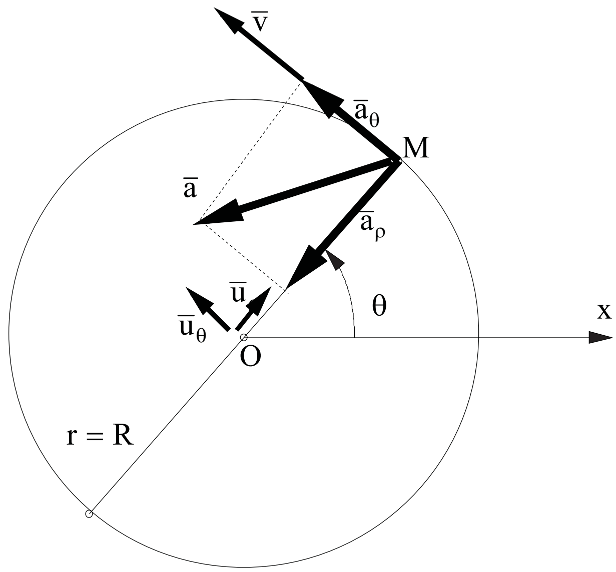


Figura 5.8

Dacă se consideră polul fixat în centrul cercului :

$$\rho = R = ct. \qquad \theta = \theta(t). \tag{5.48}$$

Primele două derivate ale acestor coordonate au valorile:

$$\dot{r} = \ddot{r} = 0; \qquad \dot{\theta} = \omega;\ \ddot{\theta} = \varepsilon. \tag{5.49}$$

În Fig. 5.8 sunt prezentate componentele vitezei şi acceleraţiei în sistemul de coordonate polare.
Viteza se determină din ecuaţiile 5.21 unde z=0:

$$\bar{v} = \dot{\rho}\bar{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\bar{u}_\theta = R\omega\bar{u}_\theta \tag{5.50}$$

$$v_\rho = 0;\ \ v_\theta = R\omega;\ \ v = \sqrt{v_\rho^2 + v_\theta^2} = R\omega. \tag{5.51}$$

Accelerația se determină cu relațiile 5.22 , 5.23 şi 5.24.

$$\bar{a} = (\ddot{\rho} - \rho\ddot{\theta})\bar{u}_\rho + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\bar{u}_\theta = -R\omega^2\bar{u}_\rho + R\varepsilon\bar{u}_\theta$$

$$a_\rho = -R\omega^2;\ a_\theta = R\varepsilon;$$

$$a = \sqrt{a_\rho^2 + a_\theta^2} = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} \tag{5.52}$$

VI Cinematica mişcării absolute a rigidului.

6.1 Parametrii cinematici în mişcarea absolută a rigidului

Cinematica mişcării absolute a rigidului are ca scop determinarea poziției ,vitezei şi accelerației unui punct de pe un rigid în mişcare generală. Se consideră un sistem de referință fix $Ox_1y_1z_1$ şi un punct oarecare din rigid numit *pol* şi notat cu O. Pentru a preciza poziția unui punct oarecare a rigidului este necesară existența unui sistem Oxyz ,solidar cu rigidul (cu axele cu orientare variabilă).Versorii acestora vor fi $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, (Fig. 6.1).

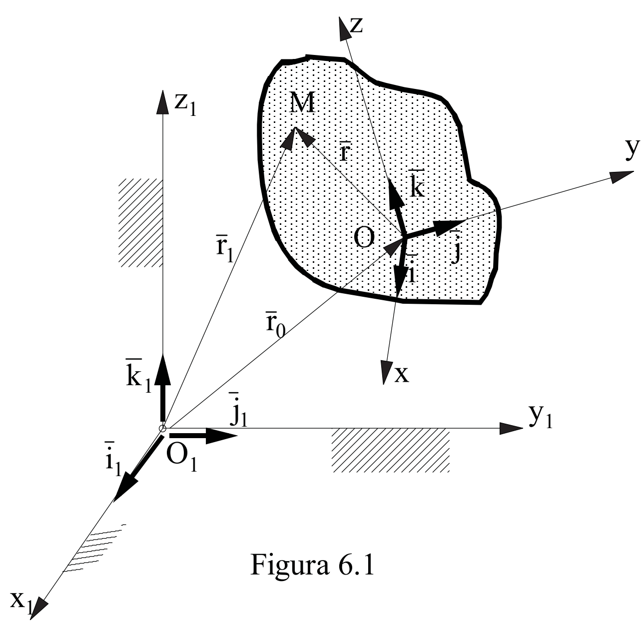


Figura 6.1

Condiția de ortonormare a sistemului mobil se exprimă prin relațiile :

$\bar{i}^2 = \bar{j}^2 = \bar{k}^2 = 1$ cei trei vectori sunt versori

$\bar{i}\bar{j} = \bar{j}\bar{k} = \bar{k}\bar{i} = 0$ cei trei vectori sunt reciproc perpendiculari (6.1)

Versorii mobili $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ se exprimă în funcție de cei ai sistemului fix cu relația:

$$\begin{aligned}\bar{i} &= \alpha_{11}\bar{i}_1 + \alpha_{12}\bar{j}_1 + \alpha_{13}k_1;\\ \bar{j} &= \alpha_{21}\bar{i}_1 + \alpha_{22}\bar{j}_1 + \alpha_{23}k_1;\\ \bar{k} &= \alpha_{31}\bar{i}_1 + \alpha_{32}\bar{j}_1 + \alpha_{33}k_1.\end{aligned} \tag{6.2}$$

Unde α_{ij}, (i şi j = 1,2,3) se numesc *cosinusurile directoare* ale reperului Oxyz în raport cu $Ox_1y_1z_1$. Ele pot fi aranjate într-o matrice **A** numită *matricea cosinusurilor directoare*.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \tag{6.3}$$

Relațiile 6.2 arată că din cele nouă cosinusuri directoare numai trei sunt independente. Este meritul lui Euler de a fi indicat cum un sistem triortogonal se poate suprapune peste axele altui sistem cu aceiaşi origine, prin efectuarea a trei rotații independente. Fie două astfel de sisteme, (Fig. 6.2):

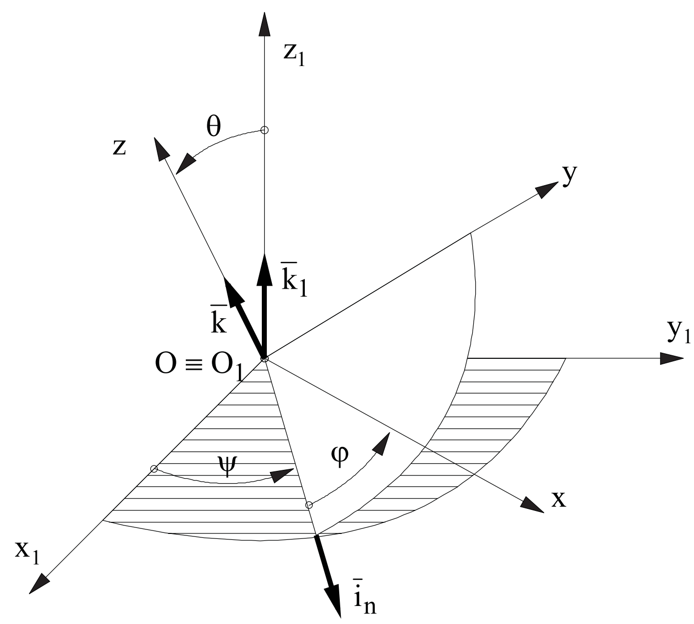


Figura 6.2

Notăm On intersecția planelor Ox_1y_1 cu Oxy (*linia nodurilor*) pe care se alege un versor $\bar{i}_n$:

- unghiul de precesie ψ este unghiul dintre axa O_{x1} şi linia nodurilor
- unghiul de rotație propriu φ este unghiul dintre linia nodurilor şi axa O_x
- unghiul de precesie θ este unghiul dintre axele Oz şi Oz_1

Suprapunerea sistemului $Ox_1y_1z_1$ peste Oxyz se face astfel:

- o rotație de unghi ψ în jurul axei Oz_1 (versor $\bar{k}_1$) urmată de
- o rotație de unghi φ în jurul axei Oz (versor $\bar{k}$) şi apoi
- o rotație de unghi θ în jurul liniei nodurilor (versor $\bar{i}_n$).

În general trecerea de la coordonate x_1, y_1, z_1 la coordonatele x,y,z se face printr-o translație de vector $\bar{r}_0(t) = x_0(t)\bar{i} + y_0(t)\bar{j} + z_0(t)\bar{k}$

urmată de cele trei rotații. Pentru a preciza poziția sistemului mobil față de cel fix vor trebui precizate funcțiile de timp:

$$\begin{cases} x_0 = x_0(t), \quad y_0 = y_0(t), \quad z_0 = z_0(t); \\ \quad \psi = \psi(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad \theta = \theta(t). \end{cases} \tag{6.4}$$

Reiese încă o dată că poziția unui rigid în spațiu este descrisă de *şase* parametri scalari independenți.

6.2 Relațiile lui Poisson

Relațiile lui Poisson exprimă derivatele vectorilor variabili $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ în raport cu timpul. Derivând fiecare egalitate (6.1) în raport cu timpul se obțin relațiile:

$$2\dot{\bar{i}}\,\bar{i} = 0; \quad 2\dot{\bar{j}}\,\bar{j} = 0; \quad 2\dot{\bar{k}}\,\bar{k} = 0; \tag{6.5}$$

$$\dot{\bar{i}}\,\bar{j} + \dot{\bar{j}}\,\bar{i} = 0; \quad \dot{\bar{j}}\,\bar{k} + \dot{\bar{k}}\,\bar{j} = 0; \quad \dot{\bar{k}}\,\bar{i} + \dot{\bar{i}}\,\bar{k} = 0.$$

Primele trei relații indică un fapt general şi anume că *derivata unui versor variabil este un vector perpendicular pe acesta*. Pentru ultimele trei relații facem notațiile:

$$\omega_z = \dot{\bar{i}}\,\bar{j} = -\dot{\bar{j}}\,\bar{i}; \quad \omega_y = \dot{\bar{j}}\,\bar{k} = -\dot{\bar{k}}\,\bar{j}; \quad \omega_y = \dot{\bar{k}}\,\bar{i} = -\dot{\bar{i}}\,\bar{k}. \tag{6.6}$$

Spre exemplu, vectorului $\dot{\bar{i}}$ fiind perpendicular pe vectorul $\bar{i}$ rezultă că este cuprins în planul Oyz şi se va exprima prin proiecțiile sale $(\dot{\bar{i}}\,\bar{j})$ şi $(\dot{\bar{i}}\,\bar{k})$ funcție de versori axelor Oy şi Oz cu relația:

$$\dot{\bar{i}} = (\dot{\bar{i}}\,\bar{j})\bar{i} + (\dot{\bar{i}}\,\bar{k})\bar{k} = \omega_z \bar{i} - \omega_y \bar{k}. \tag{6.7}$$

Alte două relații se obțin în mod similar, astfel că în final:

$$\dot{\bar{i}} = \omega_z \bar{i} - \omega_y \bar{k}; \quad \dot{\bar{j}} = \omega_x \bar{k} - \omega_z \bar{i}; \quad \dot{\bar{k}} = \omega_y \bar{i} - \omega_x \bar{j}. \tag{6.8}$$

Expresiile 6.8 dacă ω_x, ω_y, ω_z sunt considerate proiecțiile unui vector

$$\bar{\omega} = \omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k} \tag{6.9}$$

se pot interpreta astfel

$$\dot{\bar{i}} = \bar{\omega} \times \bar{i} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \omega_z \bar{j} - \omega_y \bar{k}. \tag{6.10}$$

şi alte două analoge.

Se obțin în final expresiile (*formulele lui Poisson*):

$$\dot{\bar{i}} = \bar{\omega} \times \bar{i}; \quad \dot{\bar{j}} = \bar{\omega} \times \bar{j}; \quad \bar{k} = \bar{\omega} \times \bar{k}. \tag{6.11}$$

6.3 Determinarea distribuției de viteze

Poziția unui punct M al rigidului se poate exprima astfel:

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_0 + \bar{r} = x_0 \bar{i}_1 + y_0 \bar{j}_1 + z_0 \bar{k}_1 + x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}. \tag{6.12}$$

Vectorul $\overline{r_0}$ are proiecțiile exprimate în sistemul de referință fix. Vectorul $\bar{r}$ are proiecțiile exprimate în sistemul de referință mobil. Proiecțiile x, y, z sunt constante deoarece distanța OM este constantă în baza ipotezei de perfectă rigiditate a corpului. Prin derivarea relației 6.12 în raport cu timpul se obține viteza punctului M.

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}_1}{dt} = \frac{d(\bar{r}_1 + \bar{r})}{dt} = \dot{x}_0\bar{i}_1 + \dot{y}_0\bar{j}_1 + \dot{z}_0\bar{k}_1 + x\dot{\bar{i}} + y\dot{\bar{j}} + z\dot{\bar{k}} = \dot{\bar{r}}_0 + x\bar{\omega}\times\bar{i} + y\bar{\omega}\times\bar{j} + z\bar{\omega}\times\bar{k} =$$
$$= \dot{\bar{r}}_0 + \bar{\omega}\times(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) = \dot{\bar{r}}_0 + \bar{\omega}\times\bar{r} = \bar{v}_0 + \bar{\omega}\times\bar{r}$$

În final se obține:

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega}\times\bar{r} \tag{6.13}$$

Relația 6.13 se numeşte *ecuația lui Euler pentru viteze*. Din relația 6.13 se vede că pentru a putea determina viteza unui punct al rigidului trebuie cunoscute :

- poziția punctului în rigid prin vectorul $\bar{r}$,
- viteza punctului O $\bar{v}_0$
- vectorul $\overline{\omega}$.

$\overline{V_0}, \overline{\omega}$ poartă denumirea de *parametri cinematici de ordinul I.*

Prin derivarea în raport cu timpul a relației 6.13 se obține:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{v}_0}{dt} + \frac{d}{dt}(\bar{\omega}\times\bar{r}) = \bar{a}_0 + \frac{d\bar{\omega}}{dt} + \bar{\omega}\times\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon}\times\bar{r} + \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r})$$

unde s-a notat

$$\bar{a}_0 = \dot{\bar{v}}_0 \quad \text{şi} \quad \bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}}$$

Relația:

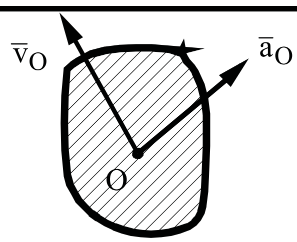
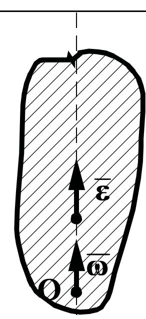
$$\bar{a} = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) \qquad (6.14)$$

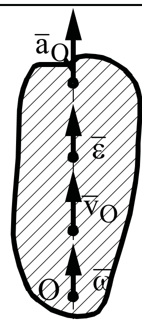
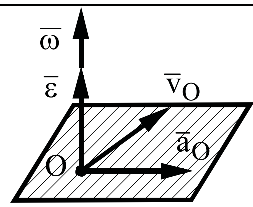
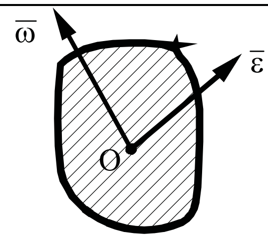
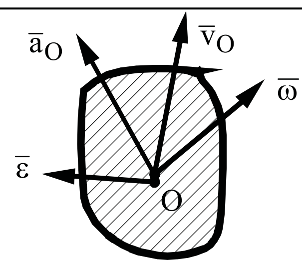
poartă denumirea de *formula lui Rivals* şi permite determinarea accelerației oricărui punct al rigidului dacă se cunosc:

- $\bar{a}_0$ - accelerația polului,
- vectorul $\bar{\varepsilon}$.

Cei doi vectori $\bar{a}_0$ şi $\bar{\varepsilon}$ poartă denumirea de parametri *cinematici de ordin doi*. În tabelul 6.1 se prezintă mişcările particulare ale rigidului în funcție de valorile parametrilor cinematici de ordin I.

TABELUL 6.1

Nr.	Denumirea mişcării	Schema	$\bar{v}$	$\bar{\omega}$	Obsevații
1	Mişcare de translație		$\bar{v}_0 \neq 0$	$\bar{\omega} = 0$	Toate punctele rigidului au aceeaşi viteză $\bar{v}$ şi aceeaşi accelerație $\bar{a}$
2	Mişcare de rotație Rigid cu axă fixă		$\bar{v}_0 = 0$	$\bar{\omega} \neq 0$	$\bar{\omega}$ coliniar cu o axă fixă $\bar{\omega} \parallel \bar{\varepsilon}$

3	Mişcare elicoidală (rototranslaţie)		$\bar{v}_0 \neq 0$	$\bar{\omega} \neq 0$	$\bar{v}_0 \| \bar{\omega}$ şi coliniari cu o axă fixă
4	Mişcare plan-paralelă		$\bar{v}_0 \neq 0$	$\bar{\omega} \neq 0$	$\bar{v}_0 \perp \bar{\omega}$, $\bar{a}_0$ şi $\bar{v}_0$ cuprinse într-un plan fix
5	Mişcare sferică (rigid cu punct fix)		$\bar{v}_0 = 0$	$\bar{\omega} \neq 0$	$\bar{\omega}$ are o direcţie oarecare variabilă în timp $\bar{\omega}$ şi $\bar{\varepsilon}$ au suporturi diferite
6	Mişcare generală		$\bar{v}_0 \neq 0$	$\bar{\omega} \neq 0$	$\bar{\omega}$, $\bar{v}_0$, $\bar{\varepsilon}$, $\bar{a}_0$ au direcţii oarecare

6.4 Mişcarea planparalelă a rigidului

Dintre mişcările particulare a rigidului se va prezenta mişcarea planparalelă deoarece este mişcarea cea mai întâlnită în aplicaţiile inginereşti. Totodată, studiul acestei mişcări permite punerea în evidenţă a marii majorităţi a proprietăţilor mişcării generale ale rigidului.

Un rigid efectuează o mişcare plan paralelă dacă tot timpul mişcării triunghiul format de trei puncte necoliniare ale acestuia rămân tot timpul paralele cu un plan fix.
Pe baza definiției rezultă următoarele proprietăți:

- toate punctele situate pe o dreaptă (Δ^*) perpendiculară pe planul mişcării descriu aceleaşi traiectorii (Fig. 6.3)

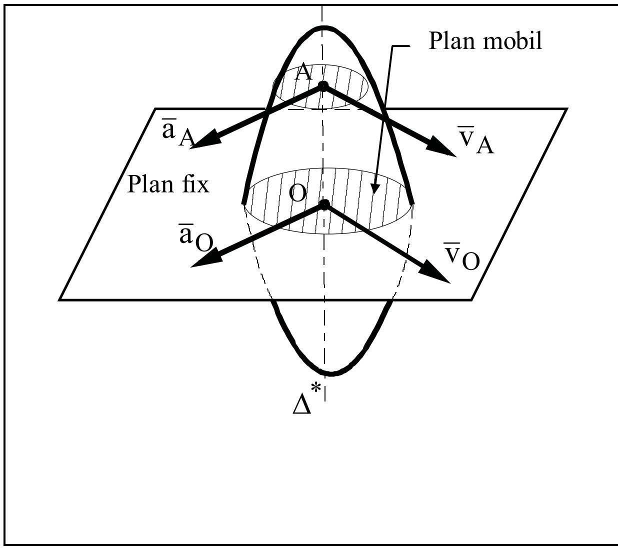


Figura 6.3

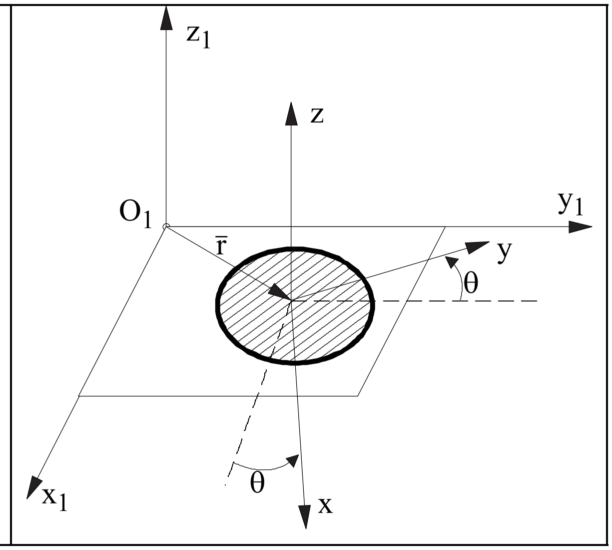


Figura 6.4

- distribuția de viteze şi accelerații este aceiaşi în oricare două plane paralele cu planul fix.
- studiul mişcării punctelor rigidului se poate reduce la studiul mişcării punctelor situate într-un singur plan paralel cu cel fix.

Din cele şase funcții ce descriu mişcarea generală a rigidului 6.4 sunt constate din motive evidente următoarele:

$$z_0 = \text{const.}; \quad \psi = \text{const.}; \quad \theta = \text{const.} \tag{6.14}$$

şi variabile:

$$x_0 = x_0(t) \quad y_0 = y_0(t), \quad \theta = \theta(t), \tag{6.15}$$

Astfel, în mişcarea plan paralelă rigidul are trei grade de libertate: două translaţii după direcţii perpendiculare şi o rotaţie după o axă perpendiculară pe planul translaţiilor (Fig. 6.4)

Parametri cinematici de ordinul unu şi doi au expresiile:

$$\bar{v}_0 = v_{0x}\bar{i} + v_{0y}\bar{j} \tag{6.16}$$

$$\bar{a}_0 = a_{0x}\bar{i} + a_{0y}\bar{j} \tag{6.16}$$

iar din

$$\omega_x = -\dot{\bar{k}}\,\bar{j} = 0; \quad \omega_y = \dot{\bar{k}}\,\bar{i} = 0; \quad \omega_z = \dot{\bar{i}}\,\bar{j} = \dot{\theta};$$

rezultă:

$$\bar{\omega} = \omega_z \bar{k} = \omega\,\bar{k} = \dot{\theta}\,\bar{k}; \tag{6.18}$$

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_z\,\bar{k} = \varepsilon\bar{k} = \ddot{\theta}\,\bar{k} \tag{6.19}$$

Vectorii viteză unghiulară şi acceleraţie unghiulară sunt normali la planul mişcării. Expresia 6.13 a vitezei se particularizează:

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} = v_{0x}\bar{i} + v_{0y}\bar{j} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} \qquad (6.20)$$

care permite determinarea proiecțiilor pe axele reperului mobil:

$$v_x = v_{0x} - y\omega; \quad v_{0y} = v_{0y} + x\omega; \quad v_z = 0; \qquad (6.21)$$

şi mărimii vitezei punctului M(x,y,z)

$$\begin{aligned} & v_x = v_{0x} - y\omega; \quad v_{0y} = v_{0y} + x\omega; \quad v_z = 0; \\ & v = |\bar{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{(v_{0x} - y\omega)^2 + (v_{0y} + x\omega)^2} \end{aligned} \qquad (6.22)$$

Centrul instantaneu de rotație (CIR) se defineşte ca punctul a cărui viteză instantanee este nulă. Notând coordonatele C.I.R. cu I(□ . □ . □) din relațiile 6.21 rezultă pentru coordonatele □ . □ . □□

$$\xi = -\frac{v_{0y}}{\omega}; \quad \eta = \frac{v_{0y}}{\omega}; \quad \zeta = \text{oarecare}. \qquad (6.23)$$

Valoarea arbitrară a lui □ arată că există o infinitate de puncte cu proprietatea sus menționată care sunt situate pe o dreaptă perpendiculară pe planul mişcării. Această dreaptă se numeşte *axa instantanee de rotație (AIR)*. Poziția AIR se modifică în timp în raport cu reperul fix $O_1x_1y_1z_1$ cât şi față de cel mobil Oxyz. AIR va descrie în sistemul de referință fixo suprafață riglată fixă numită *axoida fixă* iar în sistemul mobil o suprafață riglată numită *axoida mobilă*, (Fig. 6.5).

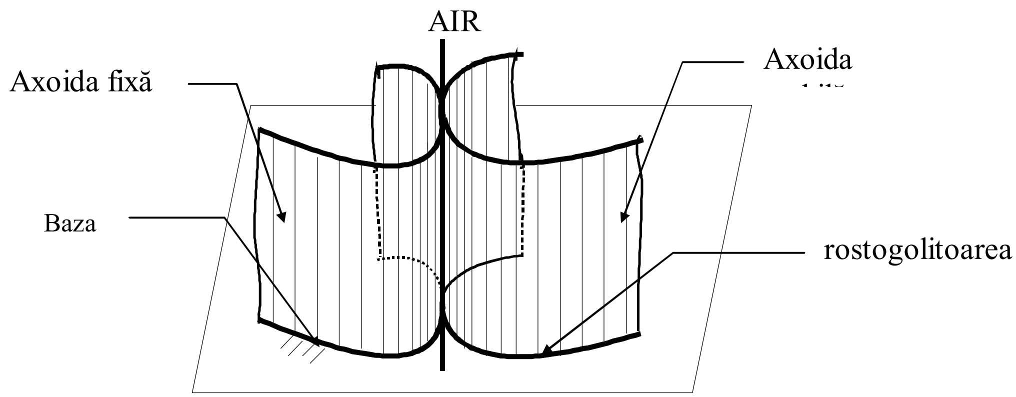


Figura 6.5

Intersecţia celor două suprafeţe riglate cu un plan paralel cu planul fix conduce la două .curbe; una fixă numită *baza* şi alta mobilă numită *rostogolitoare*, (Fig. 6.6)

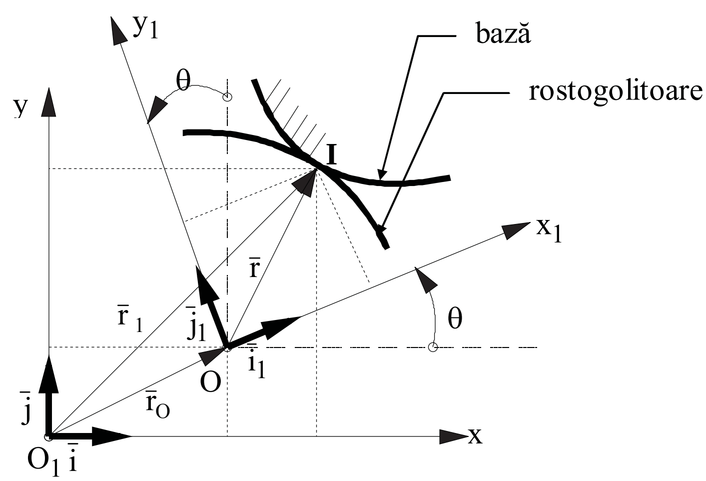


Figura 6.6

CIR are o serie de proprietăţi utile în studiul distribuţiei câmpului de viteze. Faptul că tot timpul viteza instantanee a CIR este nulă permite interpretarea mişcării ca o rotaţie instantanee în jurul acestui punct. Mişcarea rigidului poate fi concepută ca o succesiune de rotaţii în jurul unui centru de rotație variabil. Alegerea CIR drept pol permite scrierea relației lui Euler sub forma:

$$\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{IM},\tag{6.24}$$

unde I este CIR iar M un punct curent. Din relația 6.24 rezultă că viteza unui punct trebuie să fie perpendiculară pe dreapta ce uneşte CIR cu punctul respectiv, (Fig. 6.7).

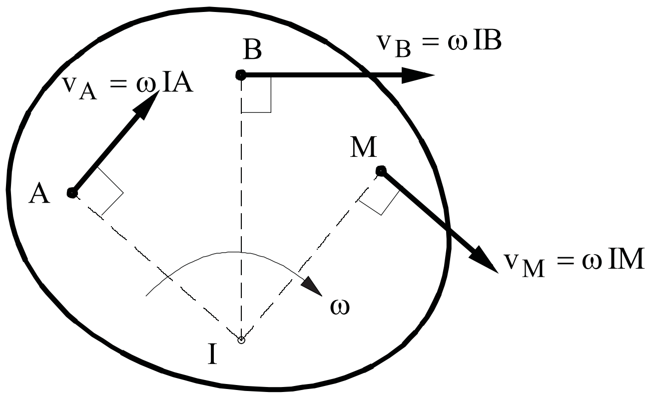


Figura 6.7

Această proprietate este folosită pentru a determina viteza unui punct B al rigidului când se cunoaşte viteza $\overline{v}_A$ unui alt punct A al rigidului şi poziția punctului, (Fig. 6.8).

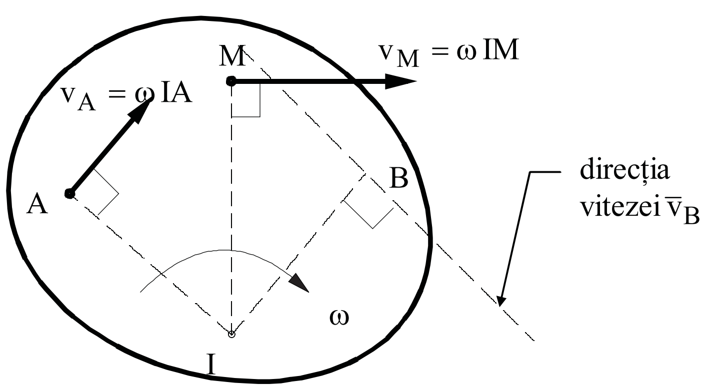


Figura 6.8

Viteza punctului B trebuie să fie perpendiculară pe CB şi să aibă sensul obţinut prin rotirea vectorului $\overline{CB}$ cu 90 de grade în sensul indicat de $\overline{\omega}$ scrierea relaţiei 6.24 atât pentru punctul A şi pentru punctul B

$$\overline{v}_A = \overline{\omega} \times \overline{IA}; \quad \overline{v}_B = \overline{\omega} \times \overline{IB}; \tag{6.25}$$

Din relaţiile 6.26 obţinem modulul vitezei $\overline{v}_B$. Sau pentru modulele acestor viteze:

$$v_A = \omega \cdot IA; \quad v_B = \omega \cdot IB; \tag{6.26}$$

Din relaţiile 6.26 rezultă modulul vitezei necunoscute

$$v_B = \frac{IB}{IA} v_A \tag{6.27}$$

Se demonstrează următoarea proprietate: *în timpul mişcării centroida mobilă (rostogolitoarea) se rostogoleşte fără alunecare peste centroida fixă (baza).*

Relaţia de legătură între vectorii de poziţie ai CIR în sistemul de coordonate fix (ξ_1, η_1) şi cel mobil (□.□) este evidentă, (Fig.6.6)

$$\xi_1 \overline{i}_1 + \eta_1 \overline{j}_1 = \overline{r}_0 + \xi \overline{i} + \eta \overline{j}. \tag{6.28}$$

Derivarea în raport cu timpul duce la:

$$\dot{\xi}_1\bar{i}_1 + \dot{\eta}_1\bar{j}_1 = \dot{\bar{r}}_0 + \dot{\xi}\bar{i} + \xi\dot{\bar{i}} + \dot{\eta}\,\bar{j} + \eta\,\dot{\bar{j}} \qquad (6.29)$$

În membrul stâng se ține cont că □ şi □ sunt coordonatele CIR.

$$\dot{\bar{r}}_0 + \xi\dot{\bar{i}} + \eta\,\dot{\bar{j}} = \bar{v}_0 + \xi\bar{\omega}\times\bar{i} + \eta\bar{\omega}\times\bar{j} = \bar{v}_0 + \bar{\omega}\times(\xi\bar{i} + \eta\bar{j}) = 0.$$

Relația 6.29 devine:

$$\dot{\xi}_1\bar{i}_1 + \dot{\eta}_1\bar{j}_1 = \dot{\xi}\bar{i} + \dot{\eta}\,\bar{j} \qquad (6.30)$$

Membrul stâng al relației 6.29 reprezintă viteza CIR pe bază iar membrul drept viteza CIR în deplasarea sa pe rostogolitoare. Din egalitatea celor două viteze (vectori) rezultă că cele două centroide sunt tot timpul tangente. (Viteza unui punct ce se mişcă pe o curbă este tangentă pe acea curbă).

Calculul modulelor celor două viteze se face cu relația:

$$\dot{\xi}_1{}^2 + \dot{\eta}_1{}^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2$$

sau

$$\left(\frac{d\xi_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta_1}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2$$

şi în final prin înmulțirea cu dt.

$$\left(d\xi_1\right)^2 + \left(d\eta_1\right)^2 = \left(d\xi\right)^2 + \left(d\eta\right)^2 \qquad (6.31)$$

Relaţia 6.31 probează faptul că CIR parcurge spaţii egale pe cele două centroide în acelaşi interval de timp şi de aici justificarea proprietăţii enunţate.

În ecuaţia lui Rivals 6.14 descompunem dublul produs vectorial şi ţinem cont de perpendicularitatea dintre viteza unghiulară şi vectorul de poziţie al unui punct curent din planul mişcării.

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + (\bar{\omega}\,\bar{r})\bar{r} - \omega^2\bar{r} + \bar{\varepsilon}\times\bar{r} = \bar{a}_0 - \omega^2\bar{r} + \bar{\varepsilon}\times\bar{r} \tag{6.32}$$

Scriem ecuaţia 6.32 cu ajutorul proiecţiilor pe axele sistemului de referinţă mobil (în plan).

$$a_x\bar{i} + a_y\bar{j} = a_{0x}\bar{i} + a_{0y}\bar{j} - \omega^2(x\bar{i} + y\bar{j}) + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x & y & 0 \end{vmatrix}, \tag{6.33}$$

şi obţinem componentele acceleraţiilor

$$\begin{cases} a_x = a_{0x} - \omega^2 x - \varepsilon y; \\ a_y = a_{0y} - \omega^2 y + \varepsilon x. \end{cases} \tag{6.34}$$

Dacă se caută un punct J de acceleraţie momentană nulă (*centrul instantaneu al acceleraţiilor*) de coordonate ξ'şi η'atunci aceste coordonate se obţin din relaţiile 6.34 prin anularea membrilor stângi. Rezolvarea sistemului astfel obţinut conduce la:

$$\xi' = \frac{a_{0x}\omega^2 - a_{0y}\varepsilon}{\varepsilon^2 + \omega^4}; \quad \eta' = \frac{a_{0y}\omega^2 + a_{0x}\varepsilon}{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{6.35}$$

Dacă se consideră două puncte oarecare A şi B pentru care se aplică ecuaţia lui Rivals şi apoi se scad aceste două ecuaţii membru cu membru, se obţine:

$$\begin{aligned} \bar{a}_A &= \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \overline{OA} - \omega^2 \overline{OA}; \\ \bar{a}_B &= \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \overline{OB} - \omega^2 \overline{OB}; \\ \Rightarrow \bar{a}_B - \bar{a}_A &= \bar{\varepsilon} \times \left(\overline{OB} - \overline{OA}\right) - \omega^2 \left(\overline{OB} - \overline{OA}\right) \end{aligned} \tag{6.36}$$

Ecuaţia 6.36 se pune sub o formă utilă în aplicaţii:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A - \omega^2 \overline{AB} + \bar{\varepsilon} \times \overline{AB} \tag{6.37}$$

Dacă se consideră că A este CIA. atunci :

$$\bar{a}_B = -\omega^2 \overline{JB} + \bar{\varepsilon} \times \overline{JB} \tag{6.38}$$

Se observă existenţa a două componente ale acceleraţiei:

$\bar{a}_{BA}^n = -\omega^2 \overline{AB}$, coliniară cu $\overline{AB}$ (*acceleraţie normală*). (6.39)

$\bar{a}_{BA}^t = \bar{\varepsilon} \times \overline{AB}$, perpendiculară pe $\overline{AB}$ (*acceleraţie tangenţială*). (6.40)

Relaţia 6.37 poate fi scrisă

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}, \tag{6.41}$$

unde

$$\bar{a}_{BA} = \bar{a}_{BA}^{n} + \bar{a}_{BA}^{t} \tag{6.42}$$

O proprietate a accelerației relative $\overline{a_{BA}}$ este că oricare ar fi punctele A şi B înclinarea ei față de segmentul $\overline{AB}$ este aceeaşi, (Fig. 6.9).

$$tg(\varphi) = \frac{a_{BA}^{t}}{a_{BA}^{n}} = \frac{\varepsilon \ell_{AB}}{\omega^2 \ell_{AB}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \tag{6.43}$$

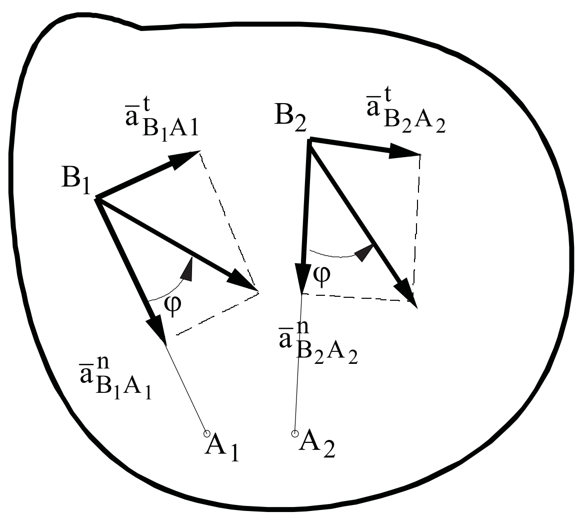


Figura 6.9

VII Cinematica mişcării relative a rigidului

7.1 Mişcarea absolută, mişcarea de transport şi mişcarea relativă. Derivata absolută a unui vector.

Adesea în practică mişcarea unui corp se raportează nu la un sistem de referinţă fix ci la unul de referinţă mobil, această mişcare a corpului faţă de reperul mobil se numeşte *mişcare relativă*. Mişcarea reperului mobil faţă de cel fix se numeşte *mişcare de transport*. *Mişcarea absolută*, a corpului în cauză, se obţine prin compararea mişcărilor de transport şi a mişcării relative. Ca un exemplu se consideră mişcarea Lunii în raport cu Soarele.

Mişcarea relativă este mişcarea Lunii în raport cu Pământul, iar mişcarea de transport este mişcarea Pământului în raport cu Soarele. O noţiune necesară în studiul mişcărilor relative o constituie *derivata absolută* a unui vector. Fie un sistem de referinţă mobil Oxyz triortogonal drept cu versorii axelor $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ şi un sistem de referinţă fix cu versorii axelor $\bar{i}_1,\bar{j}_1,\bar{k}_1$, (Fig.7.1).

Un vector variabil $\bar{V}$ va putea fi exprimat fie prin proiecţiile pe axele reperului fix , fie prin proiecţiile pe axele reperului mobil astfel:

$$\bar{V} = V_{x1}\bar{i}_1 + V_{y1}\bar{j}_1 + V_{z1}\bar{k}_1 = V_x\bar{i} + V_y\bar{j} + V_z\bar{k} \tag{7.1}$$

Derivăm ultima egalitate în raport cu timpul.

$$\dot{V}_{x1}\bar{i}_1 + \dot{V}_{y1}\bar{j}_1 + \dot{V}_{z1}\bar{k}_1 = \dot{V}_x\bar{i} + \dot{V}_y\bar{j} + \dot{V}_z\bar{k} + V_x\dot{\bar{i}} + V_y\dot{\bar{j}} + V_z\dot{\bar{k}} \tag{7.2}$$

$$\dot{V}_{x1}\bar{i}_1 + \dot{V}_{y1}\bar{j}_1 + \dot{V}_{z1}\bar{k}_1 = \frac{d\overline{V}}{dt} \tag{7.3}$$

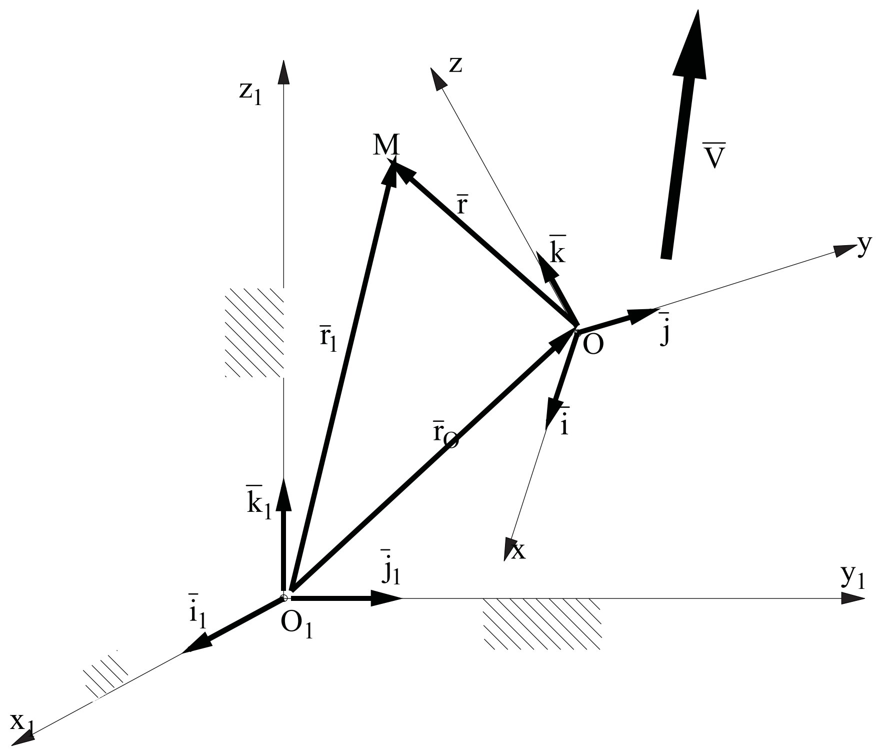


Figura 7.1

Relaţia 7.3 exprimă *derivata absolută* a vectorului $\overline{V}$ (proiecţiile vectorului pe axele sistemului fix se derivează în raport cu timpul)

$$\dot{V}_x\bar{i} + \dot{V}_y\bar{j} + \dot{V}_z\bar{k} = \frac{\partial\overline{V}}{\partial t} \tag{7.4}$$

Relaţia 7.4 exprimă *derivata relativă* a vectorului $\overline{V}$ (proiecţiile vectorului pe axele sistemului mobil se derivează în raport cu timpul considerându-se versorii sistemului ficşi)

$$V_x\dot{\bar{i}} + V_y\dot{\bar{j}} + V_z\dot{\bar{k}} = V_x\bar{\omega}\times\bar{i} + V_y\bar{\omega}\times\bar{j} + V_z\bar{\omega}\times\bar{k} = \bar{\omega}\times(V_x\bar{i} + V_y\bar{j} + V_z\bar{k}) = \bar{\omega}\times\bar{V} \qquad (7.5)$$

Se obţine relaţia finală:

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{\partial\bar{V}}{\partial t} + \bar{\omega}\times\bar{V}. \qquad (7.6)$$

Observaţii:

1. Dacă vectorul $\bar{V}$ este invariabil legat de reperul mobil proiecţiile pe axele acestui reper sunt constante şi ca atare:

$$\frac{\partial\bar{V}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \dot{\bar{V}} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{\omega}\times\bar{V}. \qquad (7.7)$$

2. Dacă $\bar{\omega}\times\bar{V} = 0$ atunci $\frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{\partial\bar{V}}{\partial t}$ (derivata absolută este egală cu derivata relativă). $\bar{\omega}\times\bar{V} = 0$ atunci când:

   a) $\bar{\omega} \| \bar{V}$;

   b) $\bar{\omega} \equiv 0$ (mişcarea triedrului mobil este o translaţie în raport cu cel fix).

3. Fie $\bar{\omega} = \bar{V}$. Aplicarea relaţiei (7.6)

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{\partial\bar{\omega}}{\partial t} + \bar{\omega}\times\bar{\omega}.$$

şi de aici:

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{\partial\bar{\omega}}{\partial t}. \qquad (7.8)$$

Derivata absolută şi derivata relativă ale vitezei unghiulare coincid întotdeauna.

7.2 Compunerea vitezelor şi acceleraţiilor în mişcarea relativă cu punctul material

Fie cele două sisteme de referinţă: cal fix şi $O_1x_1y_1z_1$ şi cel modul Oxyz şi un punct oarecare M caracterizat de cele două sisteme de vectori de poziţie (Fig. 7.1). Relaţia de legătură dintre cei doi vectori este:

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_0 + \bar{r}. \tag{7.9}$$

Derivata în raport cu timpul se face ţinând seama ca vectorul $\bar{r}_0$ este exprimat prin proiecţiile sale pe axele sistemului fix iar vectorul $\bar{r}$, variabil şi ca direcţie şi ca poziţie, prin proiecţiile pe axele sistemului mobil. Astfel:

$$\frac{d\bar{r}_1}{dt} = \frac{d\bar{r}_0}{dt} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} + \overline{\omega} \times \bar{r}\ . \tag{7.10}$$

Însă suma

$$\frac{d\bar{r}_0}{dt} + \overline{\omega} \times \bar{r} = \bar{v}_0 + \overline{\omega} \times \bar{r} \tag{7.11}$$

conform relaţiei lui Euler, reprezintă viteza unui punct solidar cu sistemul de referinţă mobil ce coincide ca poziţie cu punctul M. Altfel spus, relaţia 7.11 exprimă viteza de transport a punctului M. Cu aceste precizări se obţine legea de compunere a vitezei în mişcare relativă a punctului material.

$$\bar{v}_a = \bar{v}_t + \bar{v}_r;\ \ \bar{v}_r = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}\ . \tag{7.12}$$

Viteza absolută a unui punct material este egală cu suma vectorială dintre viteza relativă şi viteza de transport a punctului. Mărimea vitezei absolute se determină cu ajutorul teoremei generalizate a lui Pitagora:

$$|\overline{v}_a| = \sqrt{v_t^2 + v_r^2 + 2v_t\, v_r \cos(\overline{v}_t, \overline{v}_r)}. \tag{7.13}$$

Pentru a determina modul de compunere al acceleraţiilor în mişcare relativă a punctului material se derivează din nou în raport cu timpul relaţia 7.10

$$\frac{d^2\overline{r}_1}{dt^2} = \frac{d^2\overline{r}_0}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\overline{r}}{\partial t}\right) + \frac{d}{dt}(\overline{\omega}\times\overline{r}) = \frac{d^2\overline{r}_0}{dt^2} + \frac{\partial^2\overline{r}}{\partial t^2} + \overline{\omega}\times\frac{\partial\overline{r}}{\partial t} + \frac{d\overline{\omega}}{dt}\times\overline{r} + \overline{\omega}\times\left(\frac{\partial\overline{r}}{\partial t} + \overline{\omega}\times\overline{r}\right)$$
$$= \frac{d^2\overline{r}_0}{dt^2} + \overline{\omega}\times(\overline{\omega}\times\overline{r}) + \overline{\varepsilon}\times\overline{r} + 2\overline{\omega}\times\frac{\partial\overline{r}}{\partial t} + \frac{\partial^2\overline{r}}{\partial t^2}$$

$$\overline{a}_t = \frac{d^2\overline{r}_0}{dt^2} + \overline{\omega}\times(\overline{\omega}\times\overline{r}) + \overline{\varepsilon}\times\overline{r} = \overline{a}_0 + \overline{\omega}\times(\overline{\omega}\times\overline{r}) + \overline{\varepsilon}\times\overline{r} \tag{7.14}$$

reprezintă acceleraţia unui punct solidar cu sistemul de referinţă mobil şi coincide în momentul studiului ca poziţie cu punctul M, adică *acceleraţia de transport* $\overline{a}_t$. Termenul egal cu dublul produsului vectorial dintre viteza unghiulară şi viteza relativă reprezintă *acceleraţia complementară Coriolis* $\overline{a}_c$.

$$\overline{a}_c = 2\overline{\omega}\times\frac{\partial\overline{r}}{\partial t} = 2\overline{\omega}\times\overline{v}_r \tag{7.15}$$

iar

$$\bar{a}_r = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial t^2}, \qquad (7.16)$$

reprezintă *accelerația relativă* $\bar{a}_r$. Legea de compunere a accelerațiilor în mişcarea punctului material se scrie:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_t + \bar{a}_r + \bar{a}_c \qquad (7.17)$$

care în cuvinte se exprimă: *accelerația absolută este egală cu suma vectotială dintre accelerația de transport, accelerația relativă şi accelerația complementară Coriolis.* Accelerația Coriolis este un vector perpendicular pe planul definit de vectorii viteză unghiulară şi viteză relativă. această accelerație este nulă dacă

- $\bar{v}_r = 0$ (lipseşte mişcarea relativă);
- $\bar{\omega} = 0$ (mişcarea relativă este o translație)
- $\bar{v}_r \| \bar{\omega}$.

În aplicațiile în care se lucrează cu mecanisme plane, (conțin numai cuple de clasa a IV-a şi cuple de clasa a V-a), accelerația Coriolis este perpendiculară pe viteza relativă, iar sensul ei se determină mult mai uşor prin rotirea vitezei relative cu 90^o în sensul indicat de viteza unghiulară de transport. Mai mult pentru cuplele de clasa a V-a această accelerație este nulă în cazul cuplei de rotație iar pentru cupla de translație este perpendiculară pe direcția ghidajului cuplei. Completări suplimentare vor fi aduse la timpul potrivit.

VIII Cinematica mişcării relative a rigidelor

8.1 Determinarea relației de compunere a vitezelor şi accelerațiilor liniare.

Se consideră un rigid în mişcare, căruia i se ataşează un triedru $O_2x_2y_2z_2$, față de un triedru mobil $O_1x_1y_1z_1$ care la rândul său se mişcă față de sistemul de referință fix $O_0x_0y_0z_0$. Fig. 8.1.

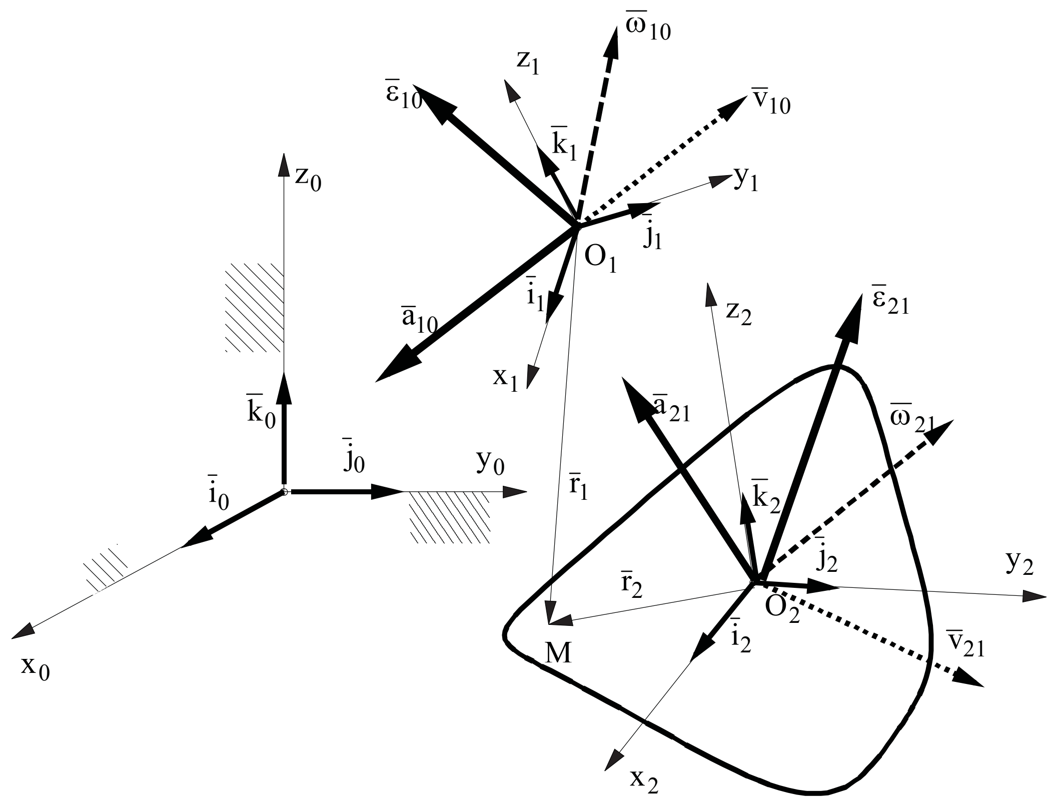


Figura 8.1

Mişcarea triedrului $O_1x_1y_1z_1$ față de triedrul $O_0x_0y_0z_0$ este caracterizată de parametri $\bar{v}_{10},\bar{\omega}_{10}$ şi $\bar{a}_{10},\bar{\varepsilon}_{10}$ iar a triedrului $O_2x_2y_2z_2$ față de triedrul $O_1x_1y_1z_1$ de parametrii cinematici $\bar{v}_{21},\bar{\omega}_{21}$ şi $\bar{a}_{21},\bar{\varepsilon}_{21}$. Punctul M are în cele două sisteme mobile de coordonate vectorii de poziţie $\bar{r}_1$ şi respectiv $\bar{r}_2$. Viteza absolută a punctului M se obţine cu relaţia

$$\bar{v}_a = \bar{v}_t + \bar{v}_r \tag{8.1}$$

unde viteza de transport este:

$$\bar{v}_t = \bar{v}_{10} + \bar{\omega}_{10} \times \bar{r}_1 \tag{8.2}$$

iar viteza relativă $\bar{v}_r$

$$\bar{v}_r = \bar{v}_{21} + \bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_2 \tag{8.3}$$

Astfel pentru viteza absolută

$$\bar{v}_a = \bar{v}_{20}^M = \bar{v}_{10} + \bar{v}_{21} + \bar{\omega}_{10} \times \bar{r}_1 + \bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_2 \tag{8.4}$$

Ecuaţia 8.4 dă relaţia pentru *compunerea vitezelor în mişcarea relativă a rigidului.*

Pentru determinarea acceleraţiei absolute a punctului M se utilizează relaţia 7.14

$$\bar{a}_a = \bar{a}_t + \bar{a}_r + \bar{a}_c \tag{8.5}$$

unde acceleraţia de transport este:

$$\bar{a}_t = \bar{a}_{10} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega}_{10} \times \bar{r}_1) + \bar{\varepsilon}_{10} \times \bar{r}_1 \tag{8.6}$$

acceleraţia complementară Coriolis

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega}_{10} \times \bar{v}_{21}^M = 2\bar{\omega}_{10} \times (\bar{v}_{21} + \bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_2) \tag{8.7}$$

şi acceleraţia relativă

$$\bar{a}_r = \bar{a}_{21} + \bar{\omega}_{21} \times (\bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_2)\ . \tag{8.8}$$

Din relaţiile 8.7, 8.6, 8.5 se obţine:

$$\begin{gathered}\bar{a}_a = \bar{a}_{20}^M = \bar{a}_{10} + \bar{a}_{21} + \bar{\varepsilon}_{10} \times \bar{r}_1 + \bar{\varepsilon}_{21} \times \bar{r}_2 + \bar{\omega}_{10} \times (\bar{\omega}_{10} \times \bar{r}_1) + \bar{\omega}_{21} \times (\bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_2) + \\ + 2\bar{\omega}_{10} \times (\bar{v}_{21} + \bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_2)\end{gathered} \tag{8.9}$$

Relaţia 8.9 reprezintă relaţia de compunere a acceleraţiilor în mişcarea relativă a rigidului .

8.2 Determinarea relaţiei de compunere a vitezelor şi acceleraţiilor unghiulare.

Pentru a determina relaţia de compunere a vitezelor unghiulare în mişcarea relativă se exprimă vitezele absolute a două puncte de pe rigid A şi B cu ajutorul relaţiei 7.22 şi apoi se ţine seama dacă cele două puncte sunt pe acelaşi rigid atunci vitezele lor sunt legate de relaţia lui Euler

$$\begin{gathered}\bar{v}_{20}^A = \bar{v}_{10} + \bar{v}_{21} + \bar{\omega}_{10} \times \overline{O_1A} + \bar{\omega}_{21} \times \overline{O_2A}, \\ \bar{v}_{20}^B = \bar{v}_{10} + \bar{v}_{21} + \bar{\omega}_{10} \times \overline{O_1B} + \bar{\omega}_{21} \times \overline{O_1B},\end{gathered} \tag{8.10}$$

Între cele două viteze subzistă relaţia lui Euler deoarece se află pe acelaşi rigid.

$$\bar{v}_{20}^B = \bar{v}_{20}^A + \bar{\omega}_0 \times \overline{AB} \tag{8.11}$$

Introducem în relaţia 8.11 scrisă sub forma:

$$\bar{v}_{20}^B - \bar{v}_{20}^A = \bar{\omega}_0 \times \overline{AB} \tag{8.12}$$

expresiile 8.10, cu observaţia $\overline{AB} = \overline{O_1B} - \overline{O_1A} = \overline{O_2B} - \overline{O_2A}$, se obţine

$$\overline{v}_{10} + \overline{v}_{21} + \overline{\omega}_{10} \times \overline{O_1B} + \overline{\omega}_{21} \times \overline{O_1B} - \overline{v}_{10} - \overline{v}_{21} - \overline{\omega}_{10} \times \overline{O_1A} - \overline{\omega}_{21} \times \overline{O_2A} = \overline{\omega}_{20} \times \overline{AB}$$

$$\Rightarrow \overline{\omega}_{10} \times \left(\overline{O_1B} - \overline{O_1A}\right) + \overline{\omega}_{21} \times \left(\overline{O_2B} - \overline{O_2A}\right) = \overline{\omega}_{20} \times \overline{AB}$$

şi în definitiv

$$\overline{\omega}_{10} \times \overline{AB} + \overline{\omega}_{21} \times \overline{AB} = \overline{\omega}_{20} \times \overline{AB} \qquad (8.13)$$

Cum vectorul $\overline{AB}$ este oarecare, relaţia 8.13 are loc dacă şi numai dacă

$$\overline{\omega}_{20} = \overline{\omega}_{10} + \overline{\omega}_{21} \qquad (8.14)$$

În relaţia 8.14 $\overline{\omega}_{20}$ reprezintă viteza unghiulară absolută $\overline{\omega}_a$, $\overline{\omega}_{10}$ viteza unghiulară de transport $\overline{\omega}_t$, iar $\overline{\omega}_{21}$ viteza de unghiulară relativ $\overline{\omega}_r$. Relaţia 8.14 se mai scrie:

$$\overline{\omega}_a = \overline{\omega}_t + \overline{\omega}_r \qquad (8.15)$$

Adică *viteza unghiulară absolută este sumă vectorială dintre viteza unghiulară de transport şi viteza unghiulară relativă*.

Pentru determinarea relaţiei de compunere a acceleraţilor unghiulare se derivează relaţia 8.14 şi se are în vedere că în timp ce $\overline{\omega}_{10}$ este raportată la sistemul de referinţă fix $O_0x_0y_0z_0$, $\overline{\omega}_{21}$ este raportată la sistemul mobil $O_1x_1y_1z_1$.

$$\frac{d\overline{\omega}_{20}}{dt} = \frac{d\overline{\omega}_{10}}{dt} + \frac{d\overline{\omega}_{21}}{dt} = \frac{d\overline{\omega}_{10}}{dt} + \frac{\partial\overline{\omega}_{21}}{\partial t} + \overline{\omega}_{10} \times \overline{\omega}_{21} \qquad (8.16)$$

$$\bar{\varepsilon}_{20} = \bar{\varepsilon}_{10} + \bar{\varepsilon}_{21} + \bar{\omega}_{10} \times \bar{\omega}_{21} \qquad (8.17)$$

În relaţia 8.17 $\bar{\varepsilon}_{20} = \bar{\varepsilon}_a$, $\bar{\varepsilon}_{10} = \bar{\varepsilon}_t$ şi $\bar{\varepsilon}_{21} = \bar{\varepsilon}_r$. *Legea de compunere a acceleraţiilor unghiulare în mişcare relativă a rigidului* este

$$\bar{\varepsilon}_a = \bar{\varepsilon}_t + \bar{\varepsilon}_r + \bar{\omega}_t \times \bar{\omega}_r \qquad (8.18)$$

Termenul $\bar{\omega}_t \times \bar{\omega}_r$ se numeşte *acceleraţie unghiulară complementară* şi este nul când:

- $\bar{\omega}_t = 0$, (mişcarea de transport este o translaţie);
- $\bar{\omega}_r = 0$, (mişcarea relativă este o translaţie);
- $\bar{\omega}_r \| \bar{\omega}_t$, (spre exemplu în mişcarea planparalelă)

Relaţiile 8.4, 8.9, 8.14 şi 8.17 se generalizează imediat prin inducţie completă. Pentru aceasta se consideră n sisteme de referinţă din care primul $O_0x_0y_0z_0$ este cel absolut (fix) iar ultimul $O_nx_ny_nz_n$ este solidar legat de rigid. În plus se cunoaşte mişcarea unui reper oarecare (k) faţă de precedentul (k-1), mişcare caracterizată de parametrii cinematici $\bar{v}_{k,k-1}$, $\bar{\omega}_{k,k-1}$, $\bar{a}_{k,k-1}$ şi $\bar{\varepsilon}_{k,k-1}$. Poziţia unui punct M al rigidului este caracterizată în sistemul $O_kx_ky_kz_k$ de vectorul de poziţie $\bar{r}_k$, Fig. 8.2

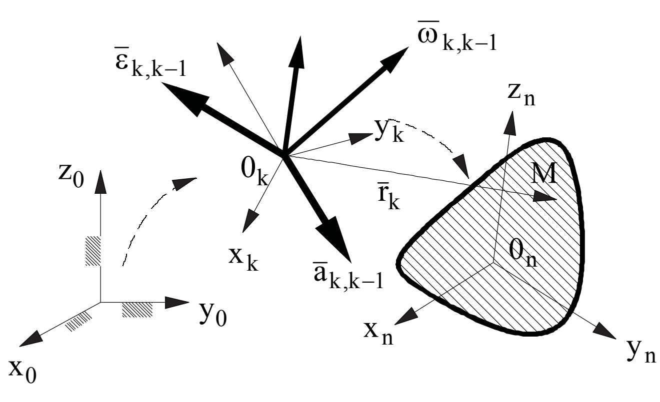


Figura 8.2

Relaţiile pentru parametrii cinematici ai rigidului sunt:

viteza absolută a punctului M:

$$\bar{v}_{n,0}^{M} = \sum_{k=1}^{n} \bar{v}_{k,k-1} + \sum_{k=1}^{n} \bar{\omega}_{k,k-1} \times \bar{r}_k \; ; \tag{8.19}$$

viteza unghiulară absolută:

$$\bar{\omega}_{n,0} = \sum_{k=1}^{n} \bar{\omega}_{k,k-1} \; ; \tag{8.20}$$

acceleraţia absolută a punctului M:

$$\bar{a}_{n,0} = \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_{k,k-1} + \sum_{k=1}^{n} (\bar{\varepsilon}_{k,k-1} \times \bar{r}_k) + \sum_{k=1}^{n} \bar{\omega}_{k,k-1} \times (\bar{\omega}_{k,k-1} \times \bar{r}_k) + \\ + 2\sum_{j=1}^{k-1} \sum_{k=1}^{n} \bar{\omega}_{j,j-1} \times (\bar{v}_{k,k-1} + \bar{\omega}_{k,k-1} \times \bar{r}_k) \tag{8.21}$$

acceleraţia unghiulară absolută:

$$\bar{\varepsilon}_{n,0} = \sum_{k=1}^{n} \bar{\varepsilon}_{k,k-1} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k-1} \bar{\omega}_{j,j-1} \times \bar{\omega}_{k,k-1} \tag{8.22}$$

XI Cinematica mecanismelor plane cu cuple inferioare

9.1. Metoda ecuațiilor vectoriale

Se aplică pentru mecanismele plane ce au în structura lor diade. Se calculează gradul de mobilitate al mecanismului care trebuie să fie egal cu numărul de elemente conducătoare. Se face descompunerea în grupe structurale. Ordinea de abordare este dinspre elementul conducător înspre elementul condus trecând din grupă în grupă. Principiul metodei constă în a exprima viteza respectiv accelerația unui punct al grupei în două moduri obținându-se o ecuație vectorială plană. De obicei rezolvarea acestei ecuații se face utilizând planul vitezelor pentru distribuția de viteze şi cel al accelerațiilor pentru distribuția de accelerații. Acest procedeu de rezolvare este unul grafic. Dacă se proiectează ecuația vectorială pe două axe perpendiculare alese convenabil se obține un sistem de două ecuații scalare care se rezolvă analitic.
Se preferă expunerea metodei grafice deoarece este mai sugestivă.

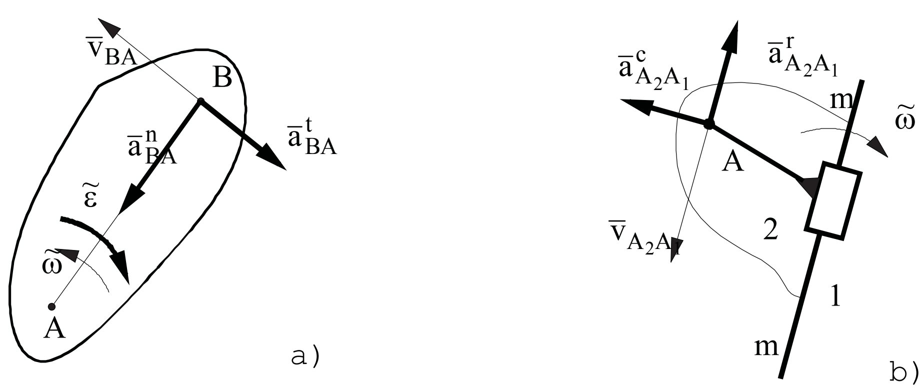


Figura 9.1

Ecuațiile vectoriale sunt de două tipuri:

I. *Ecuații care leagă vitezele (accelerațiile) a două puncte A și B ce aparțin aceluiași element cinematic*, (Fig.9.1a). Acestea sunt ecuațiile lui Euler și ale lui Rivals scrise sub o formă puțin diferită.

Ecuația de viteze:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}\,; \qquad \bar{v}_{BA} = \bar{\omega} \times \overline{AB} \begin{cases} \omega \ell_{AB}, \\ \text{perpendicular pe } \overline{AB}, \\ \text{rotim } \overline{AB} \text{ cu } \pi/2 \text{ in sens } \tilde{\omega}. \end{cases} \tag{9.1}$$

$\bar{v}_{BA}$ - este viteza relativă a punctului B față de A

Ecuația de accelerații:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}^n_{BA} + \bar{a}^t_{BA} \tag{9.2}$$

$$\bar{a}^n_{BA} = -\omega^2 \overline{AB} \begin{cases} \omega^2 \ell_{AB}, \\ \text{paralela cu } \overline{AB}, \\ \text{sens contrar lui } \overline{AB} \ (B \to A). \end{cases} \tag{9.3}$$

$$\bar{a}^t_{BA} = \bar{\varepsilon} \times \overline{AB} \begin{cases} \varepsilon \ell_{AB}, \\ \text{perpendicular pe } \overline{AB}, \\ \text{rotim } \overline{AB} \text{ cu } \pi/2 \text{ in sens } \tilde{\omega}. \end{cases} \tag{9.4}$$

Componentele a^n_{BA} și a^t_{BA} se numesc componentele *normală* și respectiv *tangențială* ale accelerației relative $\bar{a}_{BA}$.

II. *Ecuații ce leagă vitezele a două puncte ce aparțin unor elemente diferite dar coincid ca poziție în momentul analizei.* Fie A_1 un punct ce aparținând elementului 1 și A_2 un punct de pe elementul 2 ce coincid ca poziție. Mecanismul fiind cu cuple inferioare, legătura dintre cele două elemente 1 și 2 trebuie să se facă printr-o cuplă de translație de clasa a cincea. (dacă s-ar face printr-o cuplă de rotație cele două elemente sunt tot timpul două puncte comune care se suprapun în centrul cuplei de rotaţie. Dacă mai aducem încă o pereche de puncte să coincidă ca poziţie cele două elemente nu mai pot avea mişcări relative şi devin un singur element cinematic). În ecuaţiile de viteze şi acceleraţiei, viteza şi acceleraţia relative sunt tot timpul paralele cu posibilitatea de deplasare relativă din cupla de translaţie (notată mm),(Fig.9.1b).

Ecuaţia de viteze 8.1 caracteristică mişcării relative se scrie astfel:

$$\bar{v}_{A_2} = \bar{v}_{A_1} + \bar{v}_{A_2A_1} \;, \tag{9.5}$$

$\bar{v}_{A_2A_1} \| \mathrm{mm}$ (direcţia cuplei de translaţiae)

Ecuaţia de acceleraţii 8.5 se scrie.

$$\bar{a}_{A_2} = \bar{a}_{A_1} + \bar{a}^{c}_{A_2A_1} + \bar{a}^{r}_{A_2A_1} \tag{9.6}$$

$$\bar{a}^{c}_{A_2A_1} = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_{A_2A_1} \begin{cases} 2\omega\, v_{A_2A_1}, \\ \text{perpendicular pe mm}, \\ \text{rotim } \bar{v}_{A_2A_1} \text{ cu } \pi/2 \text{ in sens } \tilde{\omega}. \end{cases} \tag{9.7}$$

$$\bar{a}^{r}_{A_2A_1} \| \mathrm{mm} \;; \tag{9.8}$$

$\bar{a}^{c}_{A_2A_1}$ reprezintă *acceleraţia Coriolis* iar $\bar{a}^{r}_{A_2A_1}$ *acceleraţia relativă*. De remarcat că datorită legării prin cuplă de translaţie a celor două elemente $\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}$

Observaţii:

1. Pentru rezolvarea unei grupe se vor utiliza ecuaţii care leagă vitezele şi acceleraţiile aceloraşi puncte.

2. Necunoscutele din ecuaţiile de tipul I sunt perpendiculare pe raza vectoare, iar pentru ecuaţiile de tipul

II sunt paralele cu direcţia mişcării relative din cupla de translaţie ce leagă cele două elemente.

3. Numărul de ecuaţii de tipul II necesare în studiul cinematic al unei diade este egal cu numărul cuplelor de translaţie pe care le conţine grupa (diada).

4. Nu se va trece la determinarea unui parametru cinematic de un anumit ordin până ce toţi parametri cinematici de ordin inferior să nu fi fost determinaţi.

5. Pentru viteze şi acceleraţii unghiulare trebuie pe lângă determinarea mărimii să se precizeze şi *sensul (indicat printr-o săgeată curbă)* direcţia acestora este perpendiculară pe planul mişcării.

9.2 Construcţia poligoanelor de viteze şi acceleraţii. Teorema asemănării

Planul vitezelor este o construcţie grafică în care vitezele diferitelor puncte sunt reprezentate prin segmente orientate proporţionale cu vitezele corespunzătoare. Raportul de asemănare este scara vitezelor k_v care se defineşte ca raportul dintre mărimea vitezei reale şi segmentul corespunzător din poligon măsurat în mm. În acest plan se alege un punct p_v numit *polul vitezelor* din care pleacă toate segmentele corespunzătoare vitezelor absolute. Între punctele de pe un mecanism şi punctele din planul vitezelor există o corespondenţă definită astfel: vitezei punctului A, $\overline{v}_A$, îi va corespunde în poligon vectorul $\overline{p_v a}$ şi are loc relaţia:

$$\overline{v}_A = k_v \overline{p_v a} \tag{9.9}$$

unde k_v este scara vitezelor cu dimensiunea $\left[\frac{m/s}{mm}\right]$

În planul vitezelor vom întâlni notaţiile punctelor de pe mecanism dar notate cu litere mici; de exemplu a, b, c..….

În planul vitezelor funcţionează *teorema asemănării pentru viteze*, care spune: *vârfurile vitezelor a trei puncte necoliniare de pe un rigid formează o figură asemenea şi parcursă în acelaşi sens ca şi figura formată de cele trei puncte.*(Fig. 9.2).

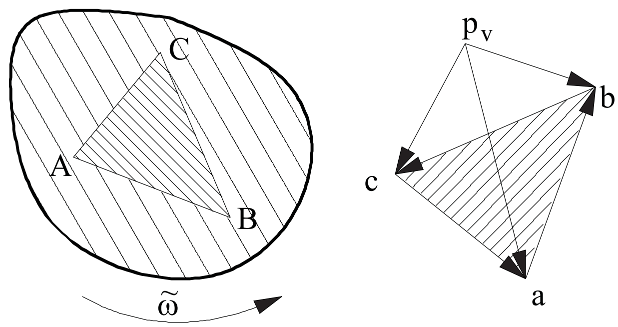


Figura 9.2

În cazul în care punctele sunt coliniare şi punctele corespunzătoare din poligon vor fi coliniare se vor afle atunci în acelaşi raport ca şi punctele de pe rigid. Vectorii corespunzători vitezelor absolute (marcaţi cu un singur indice : $\overline{v}_A, \overline{v}_{B,} \overline{v}_{A_1},...,$) pornesc toţi din polul vitezelor. Cei corespunzători vitezelor relative (marcaţi cu doi indici: $\overline{v}_{BA}, \overline{v}_{A_2A_1},...,$) au capetele în puncte diferite pe polurile vitezelor. Ecuaţiile din poligonul de viteze ce corespund ecuaţiilor 9.1 şi 9.5 sunt:

$$\overline{p_v b} = \overline{p_v a} + \overline{ab} \tag{9.10}$$

şi respectiv:

$$\overline{p_v a_2} = \overline{p_v a_1} + \overline{a_1 a_2} \tag{9.11}$$

Poligonul de acceleraţii se construieşte în acelaşi mod cu cel al vitezelor dar punctele din planul acceleraţiilor se notează

cu mici indexate cu apostrof ($\bar{a}', \bar{b}', \bar{a}'_1, ...$) cu două excepții care vor fi specificate. Polul accelerațiilor se notează cu p_a. Scara accelerațiilor este k_a și are dimensiunea $\left[\frac{m/s^2}{mm}\right]$.
Teorema asemănării pentru accelerații are același enunț ca în cazul vitezelor. Ecuațiile din poligonul de accelerații corespunzătoare ecuațiilor 9.2 și 9.6. sunt:

$$\overline{p_a b'} = \overline{p_a a'} + \overline{a' n_{BA}} + \overline{n_{BA} b'}, \tag{9.12}$$

respectiv

$$\overline{p_a a'_2} = \overline{p_a a'_1} + \overline{a'_1 k_{A_1A_2}} + \overline{k_{A_1A_2} a'_2} \tag{9.13}$$

n_{BA} și $k_{A_1A_2}$ sunt punctele din planul accelerațiilor și constituie cele două excepții subliniate mai sus.

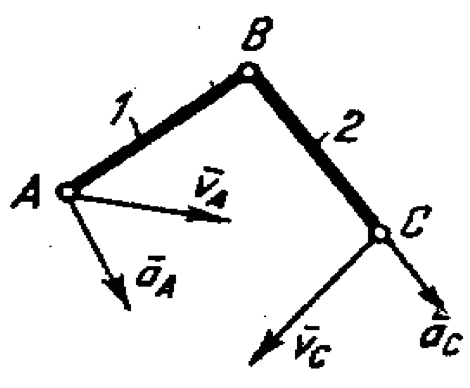
Rezolvarea unei ecuații vectoriale cu ajutorul poligoanelor se face scriind în ambii membri ai ecuației mai întâi termenii cunoscuți iar ultimul loc în fiecare membru va fi ocupat de un termen pentru care nu se cunoaște decât direcția.
În planul corespunzător se construiesc cei doi membri ai ecuației utilizând regula poligonului. Pentru fiecare membru ultimul vector va avea numai originea și direcția cunoscute, iar vârful necunoscut. La intersecția celor două direcții ce corespund vectorilor necunoscuți se va afla vârful vectorilor necunoscuți. Pentru determinarea mărimii acestor vectori, se măsoară segmentele reprezentative din poligon, în milimetri și se înmulțesc cu scara planului respectiv.
În TABELUL 9.1 se prezintă rezolvarea grafoanalitică pentru cele cinci aspecte ale diadei.

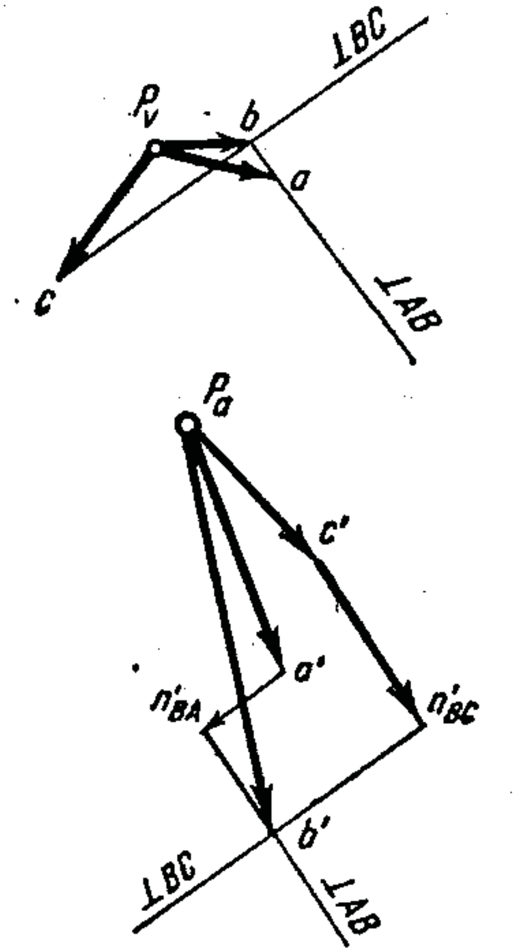
9.3. Metoda contururilor vectoriale

Este o metodă analitică care permite determinarea poziției distribuției de viteze şi accelerații a oricărui mecanism plan, cu cuple inferioare. S-a arătat că într-un mecanism plan o cuplă superioară poate fi înlocuită pentru a se obține numai lanțuri cinematice plane cu cuple inferioare. Principiul metodei constă în scrierea ecuațiilor vectoriale de închidere ale contururilor vectoriale corespunzătoare unui mecanism plan. Dacă se consideră un lanț cinematic plan închis unim cu segmente de dreaptă centrele cuplelor acestuia. Alegem un sens de parcurs şi vectorizăm aceste laturi scriind ecuația de închidere sub forma:

$$\bar{\ell}_1 + \bar{\ell}_2 + \ldots\ldots + \bar{\ell}_n = 0 \qquad (9.14)$$

TABELUL 9.1

Tip	Schița diadei şi poligoanele de viteze şi accelerații	Ecuații
RRR		



$$\bar{v}_B = \underline{\underline{\bar{v}_A}} + \underset{\perp BA}{\underline{\bar{v}_{BA}}} = \underline{\underline{\bar{v}_C}} + \underset{\perp BC}{\underline{\bar{v}_{BC}}}$$

$$\omega_1 = \frac{v_{BA}}{AB} = \frac{k_v\,(ab)}{AB}$$

$$\omega_2 = \frac{v_{BC}}{BC} = \frac{k_v\,(cb)}{BC}$$

$$\Longrightarrow \bar{v}_B = k_v\,(\overline{P_v b})$$

$$\bar{a}_B = \underline{\underline{\bar{a}_A}} + \underset{\substack{\parallel BA \\ \to A}}{\underline{\underline{\bar{a}^n_{BA}}}} + \underset{\perp BA}{\underline{\bar{a}^t_{BA}}} = \underline{\underline{\bar{a}_C}} + \underset{\substack{\parallel BC \\ B\to C}}{\underline{\underline{\bar{a}^n_{BC}}}} + \underset{\perp BC}{\underline{\bar{a}^t_{BC}}}$$

$$a^n_{BA} = \omega_1^2 \times AB$$

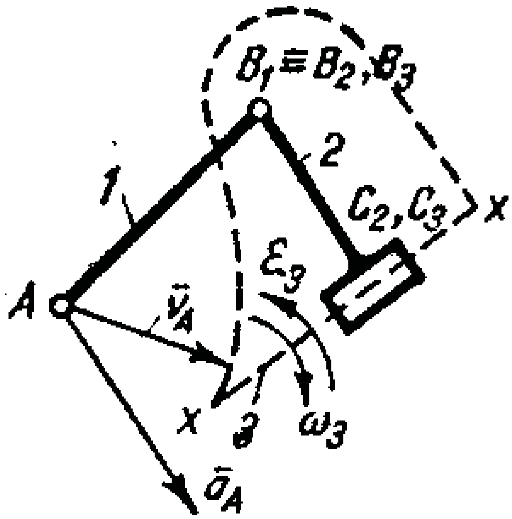
$$a^n_{BC} = \omega_2^2 \times BC$$

$$\varepsilon_1 = \frac{a^t_{BA}}{AB} = \frac{k_a\,(n'_{BA}b')}{AB}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{a^t_{BC}}{BC} = \frac{k_a\,(n'_{BC}b')}{BC}$$

$$\Longrightarrow \bar{a}_B = k_a\,(\overline{P_a b'})$$

RTT



$$\overline{v}_{B_1} = \underline{\underline{\overline{v}_A}} + \underset{\perp BA}{\overline{v}_{BA}} \equiv \overline{v}_{B_2} = \underline{\underline{\overline{v}_{B_3}}} + \underset{\parallel xx}{\overline{v}_{B_2B_3}}$$

$$\omega_1 = \frac{v_{BA}}{AB} = \Longrightarrow v_{B_2} = k_v\,(P_v b_2)$$

$$\overline{v}_{C_2} = \underline{\underline{\overline{v}_{C_3}}} + \underline{\underline{\overline{v}_{C_2C_3}}}$$

$$v_{C_2C_3} = v_{B_2B_3};\ (c_3c_2) = (b_3b_2)$$

$$\Longrightarrow \overline{v}_{C_2} = k_v\,(\overline{P_v c_2})$$

$$\overline{a}_{B_1} = \underline{\underline{\overline{a}_A}} + \underset{\parallel BA}{\overline{a}^n_{BA}} + \underset{\perp BA}{\overline{a}^t_{BA}} =$$

$$\overline{a}_{B_2} = \underline{\underline{\overline{a}_{B_3}}} + \underset{\perp xx}{\underline{\underline{\overline{a}^c_{B_2B_3}}}} + \underset{\parallel xx}{\overline{a}^r_{B_2B_3}}$$

$$a^n_{BA} = \omega_1^2 \cdot AB$$

$$\overline{a}^c_{B_2B_3} = 2\overline{\omega}_3 \times \overline{v}_{B_2B_3}$$

$$\overline{a}^c_{B_2B_3} = 2\overline{\omega}_3 \times \overline{v}_{B_2B_3}$$

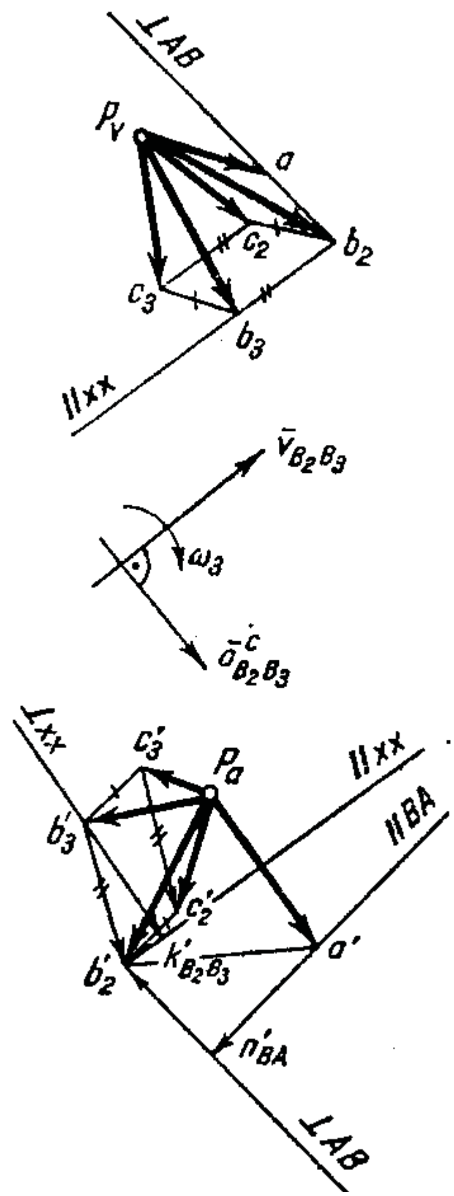
$$\omega_1 = \frac{a^t_{BA}}{BA}$$

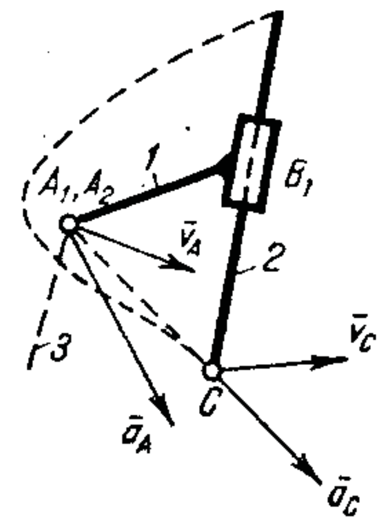
$$\Longrightarrow \overline{a}_{B_2} = k_a\,(\overline{P_a b_2'})$$

$$\overline{a}_{C_2} = \underline{\underline{\overline{a}_{C_3}}} + \underline{\underline{\overline{a}_{C_2C_3}}}$$

$$\overline{a}_{C_2C_3} = \overline{a}_{B_2B_3} = \overline{a}^c_{B_2B_3} + \overline{a}^r_{B_2B_3}$$

$$\Longrightarrow \overline{a}_{C_2} = k_a\,(\overline{P_a c_2'})$$


⊥AB
p_v
a
b_2
c_2
c_3
b_3
∥xx
$\bar{v}_{B_2B_3}$
ω_3
$\bar{a}^c_{B_2B_3}$
⊥xx
c_3'
p_a
∥xx
∥BA
b_3'
c_2'
$k'_{B_2B_3}$
a'
b_2'
n'_{BA}
⊥AB



$\bar v_{A_3} \equiv \bar v_{A_1}$

$$\bar v_{A_2} = \underline{\underline{\bar v_{A_1}}} + \underset{\parallel BC}{\bar v_{A_2A_1}} = \underline{\underline{\bar v_C}} + \underset{\perp AC}{\bar v_{A_2C}}$$

$$\omega_2 = \frac{v_{A_2C}}{AC}$$

$\Longrightarrow \bar v_{A_2} = k_v \cdot (\overline{P_v a_2})$

$\bar v_{B_2} \Longrightarrow$ prin teorema asemănării:

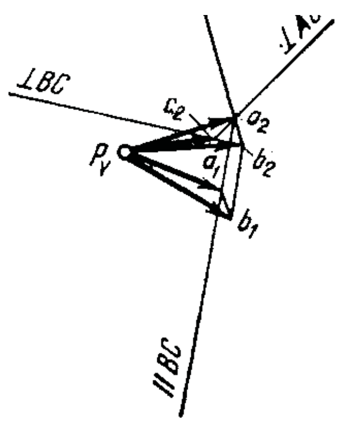
$\Delta A_2B_2C \sim \Delta a_2 b_2 c$

$$\left.\begin{array}{l}(a_2b_2)\perp A_2B_2\\ (b_2c)\perp BC\end{array}\right\}(a_2b_2)\cap(b_2c)\Longrightarrow b_2$$

$(a_2c)\perp AC$

$$\bar v_{B_1} = \underline{\underline{\bar v_{B_2}}} + \underline{\underline{\bar v_{B_1B_2}}} \Longrightarrow \bar v_{B_1} = k_v(\overline{P_v b_1})$$

$\bar v_{B_1B_2} = \bar v_{A_1A_2} = -\bar v_{A_2A_1}$



$\bar a_{A_3} \equiv \bar a_{A_1}$

$$\bar a_{A_2} = \underline{\underline{\bar a_{A_1}}} + \underset{\perp BC}{\underline{\underline{\bar a^c_{A_2A_1}}}} + \underset{\parallel BC}{\bar a^r_{A_2A_1}} = \underline{\underline{\bar a_C}} + \underset{\parallel BC}{\underline{\underline{\bar a^n_{A_2C}}}} + \underset{\perp A_2C}{\bar a^t_{A_2C}}$$

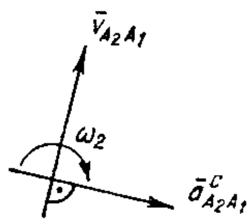
$\bar a^c_{A_2A_1} = 2\bar\omega_2 \times \bar v_{A_2A_1}$

$\bar a^n_{A_2C} = -\omega_2^2 \cdot \overline{A_2C}$

$$\varepsilon_2 = \frac{a^t_{A_2C}}{AC}$$

$\Longrightarrow \bar a_{A_2} = k_a(\overline{P_a a_2'})$

$\bar a_{B_2} \Longrightarrow$ prin teorema asemănării:



$\Delta A_2B_2C \sim \Delta a_2'b_2'c'$

$$\frac{A_2C_2}{(a_2'c_2')} = \frac{A_2B_2}{(a_2'b_2')} = \frac{B_2C_2}{(b_2'c_2')}$$

$$(a_2'b_2') = \frac{A_2B_2}{A_2C_2}(a_2'c_2')$$

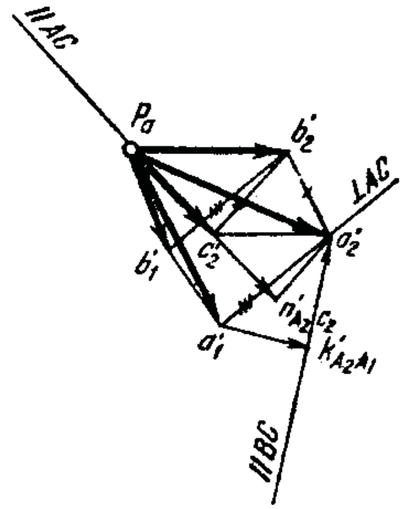
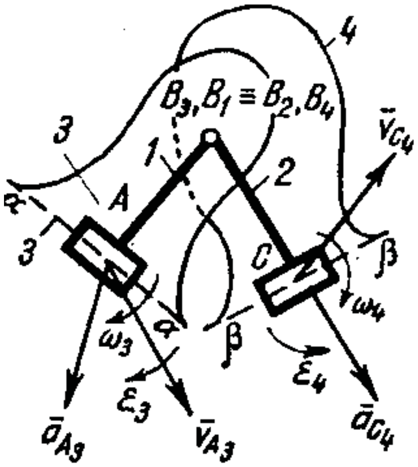
$$(b_2'c_2') = \frac{B_2C_2}{A_2C_2}(a_2'c_2)$$

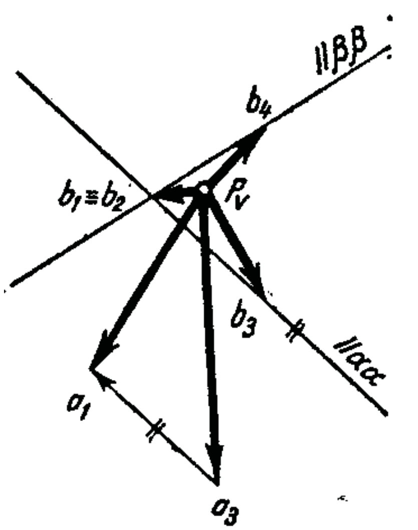
$\bar a_{B_1} = \bar a_{B_2} + \bar a_{B_1B_2}$

$\bar a_{B_1B_2} = \bar a_{A_1A_2} = -\bar a_{A_2A_1} =$

$= -(\bar a^c_{A_2A} + \bar a^r_{A_2A_1})$

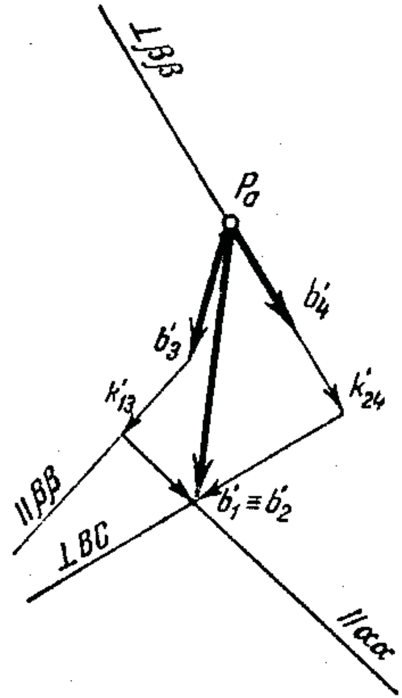
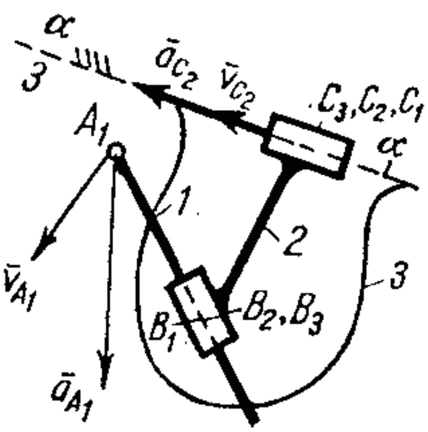
$\Longrightarrow \bar a_{B_1} = k_a(\overline{P_a b_1'})$

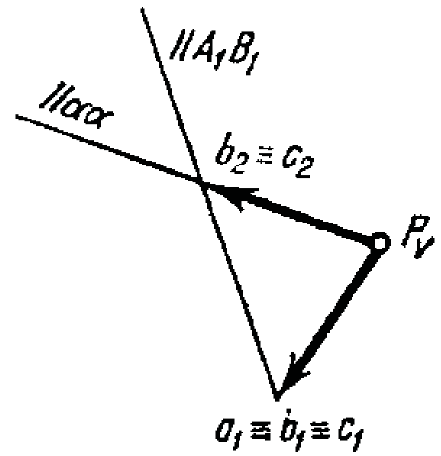
<table>
<tr><td></td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>TRT</td><td>

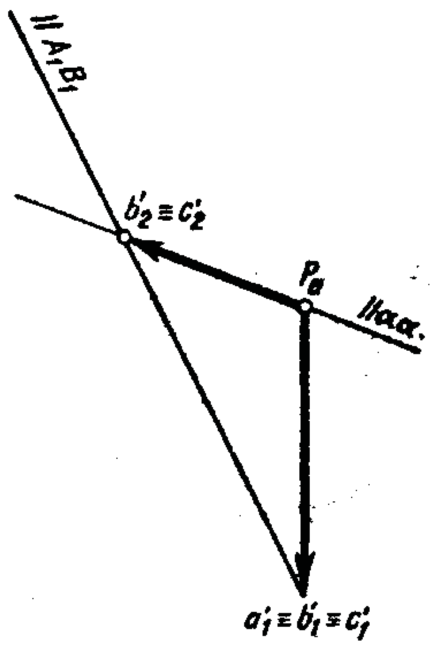


$(b_3b_1) \overset{=}{\parallel} a_3a_1$</td><td>$\bar{v}_{B_1} = \underline{\underline{\bar{v}_{B_3}}} + \underset{\parallel\alpha\alpha}{\bar{v}_{B_1B_3}} = v_{B_2} = \underline{\underline{\bar{v}_{B_4}}} + \underset{\parallel\beta\beta}{\bar{v}_{B_2B_4}}$
$\Longrightarrow \bar{v}_{B_1} = \bar{v}_{B_2} = k_v\,(\overline{P_v b_1})$
$\bar{v}_{B_3B_1} = -\bar{v}_{B_1B_3} = k_v\,(\overline{b_1b_3})$
$\bar{v}_{B_4B_2} = -\bar{v}_{B_2B_4} = k_v\,(\overline{b_2b_4})$

$\bar{v}_{A_1} = \underline{\underline{\bar{v}_{A_3}}} + \underline{\underline{\bar{v}_{A_1A_3}}}$
$\bar{v}_{C_2} = \underline{\underline{\bar{v}_{C_4}}} + \underline{\underline{\bar{v}_{C_2C_4}}}$
$(\bar{v}_{A_1A_3} = \bar{v}_{B_1B_3};\ \bar{v}_{C_2C_4} = \bar{v}_{B_2B_2})$</td></tr>
</table>

		$\bar a_{B_1} = \underline{\underline{\bar a_{B_3}}} + \underset{\perp\alpha\alpha}{\underline{\underline{\bar a^c_{B_1B_3}}}} + \underset{\parallel\alpha\alpha}{\underline{\bar a^r_{B_1B_3}}} =$ $= \bar a_{B_2} = \underline{\underline{\bar a_{B_4}}} + \underset{\perp\beta\beta}{\underline{\underline{\bar a^c_{B_2B_4}}}} + \underset{\parallel\beta\beta}{\underline{\bar a^r_{B_2B_4}}}$ $\Longrightarrow \bar a_{B_1} = \bar a_{B_2} = k_a(\overline{p_a b_1'})$ $\bar a^c_{B_1B_3} = 2\bar\omega_3 \times \bar v_{B_1B_3} = k_a(\overline{b_3' k_{13}'})$ $\bar a^c_{B_2B_4} = 2\bar\omega_4 \times \bar v_{B_2B_4} = k_a(\overline{b_4' k_{24}'})$ $\bar a^r_{B_1B_3} = k_a(\overline{k_{13}' b_1'})$ $\bar a^r_{B_2B_4} = k_a(\overline{k_{24}' b_2'})$ $\bar a_{A_1} = \underline{\underline{\bar a_{A_3}}} + \underline{\underline{\bar a^c_{A_1A_3}}} + \underline{\underline{\bar a^r_{A_1A_3}}}$ $\bar a_{A_2} = \underline{\underline{\bar a_{A_4}}} + \underline{\underline{\bar a^c_{A_2A_4}}} + \underline{\underline{\bar a^r_{A_2A_4}}}$ $\bar a^c_{A_1A_3} = \bar a^c_{B_1B_3}$
		$\omega_3 = \omega_2 = \omega_1 = 0 \Longrightarrow \bar v_{B_1A_1} = 0$ $\Longrightarrow \bar v_{A_1} = \bar v_{C_1} = \bar v_{B_1} = k_v(\overline{p_v b})$ $\underset{\parallel\alpha\alpha}{\underline{\bar v_{B_2}}} = \underline{\underline{\bar v_{B_1}}} + \underset{\parallel A_1B_1}{\underline{\bar v_{B_2B_1}}}$ $\Longrightarrow \bar v_{B_2} = k_v(\overline{p_v b_2}) = \bar v_{C_2}$





$$\varepsilon_3 = \varepsilon_2 = \varepsilon_1 = 0$$

$$\Longrightarrow \bar{a}_{A_1} = \bar{a}_{B_1} = \bar{a}_{C_1} = k_a\left(\overline{P_a b_1'}\right)$$

$$\underset{\parallel \alpha\alpha}{\underline{\bar{a}_{B_2}}} = \underline{\underline{\bar{a}_{B_1}}} + \underset{=0}{\underline{\underline{\bar{a}^c_{B_2B_1}}}} + \underset{\parallel A_1B_1}{\underline{\bar{a}^r_{B_2B_1}}}$$

$$\bar{a}^c_{B_2B_1} = 2\bar{\omega}_1 \times \bar{v}_{B_2B_1} = 0$$

$$\Longrightarrow \bar{a}_{B_2} = k_a\left(\overline{P_a b_2'}\right)$$

$$\bar{a}^r_{B_2B_1} = k_a\left(\overline{b_1' b_2'}\right)$$

Ecuația 9.14 este ecuația de închidere a conturului vectorial. Se alege un sistem de axe Oxy convenabil în planul mecanismului. Ecuația 9.14 se proiectează pe axele sistemului de coordonate. (Se înmulțeşte scalar fiecare ecuație cu versorii $\bar{i}$ şi $\bar{j}$).

Se recomandă ca orientarea tuturor vectorilor să se facă în raport cu aceiaşi bază de măsurare. Pentru aceasta, în originea fiecărui vector se duce o paralelă la semiaxa pozitivă Ox. Vectorul $\bar{\ell}_k$ poate fi reprezentat sub forma:

$$\overline{\ell}_k = \ell_k\,\overline{u}_k \tag{9.15}$$

unde $\overline{u}_k$ este un versor coliniar şi cu acelaşi sens cu vectorul, (Fig. 9.2).

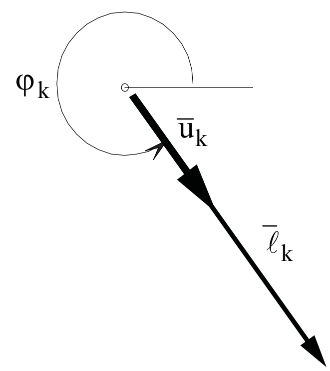


Figura 9.2

Direcţia vectorului $\overline{\ell}_k$ este caracterizată de unghiul φ_k măsurat în sens trigonometric de la paralela dusă în originea acestuia la semiaxa pozitivă Ox până la vector. În acest fel se asigură o bază comună de raportare a direcţiilor vectorilor. Ecuaţia 9.14 se poate scrie:

$$\sum_{k=1}^{n} \ell_k \overline{u}_k = 0 \mid \overline{i}; \overline{j} \tag{9.15}$$

şi proiectată pe axe (înmulţită scalar cu versorii axelor)

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} \ell_k \overline{u}_k \overline{i} = 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \ell_k \overline{u}_k \overline{j} = 0 \end{cases} \tag{9.16}$$

Dar

$$\bar{u}_k\bar{i} = |\bar{u}||\bar{i}|\cos[\angle(\bar{u}_k, \bar{i})] = 1 \cdot 1\cos(\varphi_k)$$
$$\bar{u}_k\bar{j} = |\bar{u}||\bar{j}|\cos[\angle(\bar{u}_k, \bar{j})] = 1 \cdot 1\cos(\varphi_k - \frac{\pi}{2}) = \sin(\varphi_k) \quad (9.17)$$

Ecuaţiile de proiecţie ale ecuaţiei de închidere 9.14 iau forma :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} \ell_k \cos(\varphi_k) = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} \ell_k \sin(\varphi_k) = 0; \end{cases} \quad (9.18)$$

Sistemul 9.18 este un sistem cu două ecuaţii şi poate avea două necunoscute pentru a fi compatibil. Dacă mecanismul este format numai din grupe structurale de clasa a II-a (diade) acest lucru este întotdeauna este posibil. În cazul grupelor de clasă mai mare decât doi trebuie considerate simultan ecuaţiile de proiecţie a mai multor contururi vectoriale. Sistemul 9.18 furnizează *parametri cinematici de poziţie* ai lanţului cinematic. De obicei soluţiile acestuia sunt *multiple* şi va trebui aleasă dintre toate soluţiile cea care corespunde mecanismului real. Se recomandă în acest scop un desen la scară a mecanismului pentru o poziţie precizată a elementelor conducătoare.

După determinarea poziţiei se pot determina vitezele fie prin derivare directă în raport cu timpul a expresiilor necunoscutelor din sistemul 9.18 fie se derivează fiecare ecuaţie a sistemului în raport cu timpul şi apoi se rezolvă. În primul caz se obţin relaţii complicate dar care nu depind decât de parametrii constructivi, de poziţia şi mişcarea elementelor conducătoare. În al doilea caz rezultă un sistem algebric dar care în expresiile coeficienţilor necunoscutelor va conţine şi soluţiile sistemului 9.18. Derivarea se face ținând cont că în general pentru un vector variază atât mărimea cât și direcția. Astfel ecuațiile pentru determinarea vitezelor sunt:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} \frac{d\ell_k}{dt}\cos(\varphi_k) - \ell_k \sin(\varphi_k)\omega_k = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} \frac{d\ell_k}{dt}\sin(\varphi_k) + \ell_k \cos(\varphi_k)\omega_k = 0; \end{cases} \qquad \omega_k = \frac{d\varphi_k}{dt}. \tag{9.19}$$

Pentru ca sistemul 9.19 să aibă soluție trebuie ca discriminantul său să fie nenul. Această condiție va determina o restricție între parametri constructivi ai mecanismului. Pentru determinarea accelerațiilor se derivează încă o dată în raport cu timpul ecuațiile 9.18 și se obține:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} \frac{d^2\ell_k}{dt^2}\cos(\varphi_k) - \ell_k\varepsilon_k \sin(\varphi_k)\omega_k - 2\omega_k \frac{d\ell_k}{dt}\sin(\varphi_k) - \omega_k^2 \ell_k \cos(\varphi_k) = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} \frac{d^2\ell_k}{dt^2}\sin(\varphi_k) + \ell_k\varepsilon_k \cos(\varphi_k)\omega_k + 2\omega_k \frac{d\ell_k}{dt}\cos(\varphi_k) - \omega_k^2 \ell_k \sin(\varphi_k) = 0; \end{cases} \tag{9.20}$$

unde s-a notat:

$$\varepsilon_k = \frac{d^2\varphi_k}{dt^2} \tag{9.21}$$

Sistemul 9.20 este tot un sistem algebric liniar și are discriminant ca și sistemul 9.19. Pentru un mecanism ce conține mai multe contururi vectoriale există posibilitatea ca nu toate să fie îndeplinite și este posibilă obținerea de ecuații scalare care sunt echivalente. Numărul de contururi independente se determină astfel: se desface unul din lanțurile cinematice închise ale mecanismului. Dacă ceea ce a rămas mai conține lanțuri închise se desfac pe rând toate aceste lanțuri.

Numărul de lanțuri cinematice desfăcute este egal cu numărul de contururi independente. Dacă mecanismul este format numai din diade se începe cu contururile ce conțin elementele conducătoare şi se continuă apoi cu contururile ce conțin următoarele diade în ordinea legării lor pentru formarea mecanismului. La aplicarea metodei este posibil ca deşi conturul să fie să fie format numai prin legarea la elementul conducător şi la batiu a unei diade, numărul necunoscutelor să fie superior lui doi. În acest caz se caută o direcție după care unul din vectori are proiecție constantă şi se descompune vectorul după acea direcție şi după una perpendiculară pe aceasta.

X. Mecanisme cu came

10.1 Mecanismele cu came. Definiție. Exemple. Clasificare

Mecanismele cu came sunt mecanisme la care elementul conducător este un element profilat numit *camă* care transmite mişcarea la un element condus numit tachet. În Fig. 10.1, 10.2, 10.3, 10.4, se prezintă diferite soluții constructive ale acestor mecanisme:

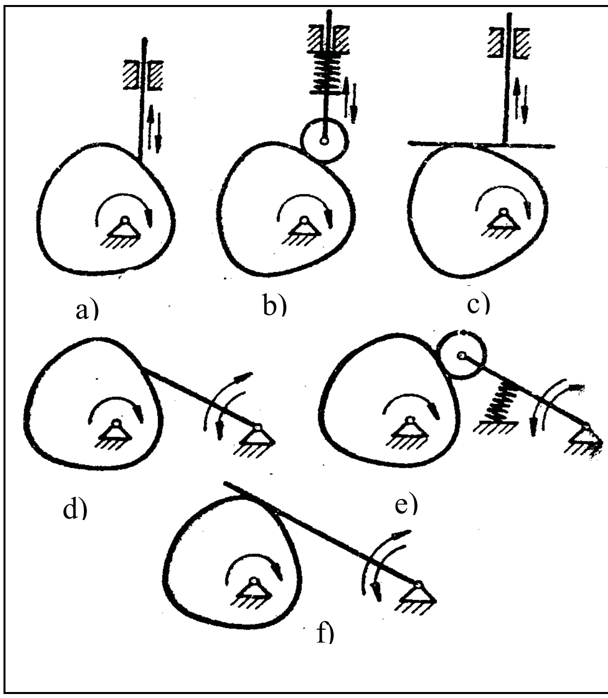


Figura 10.1

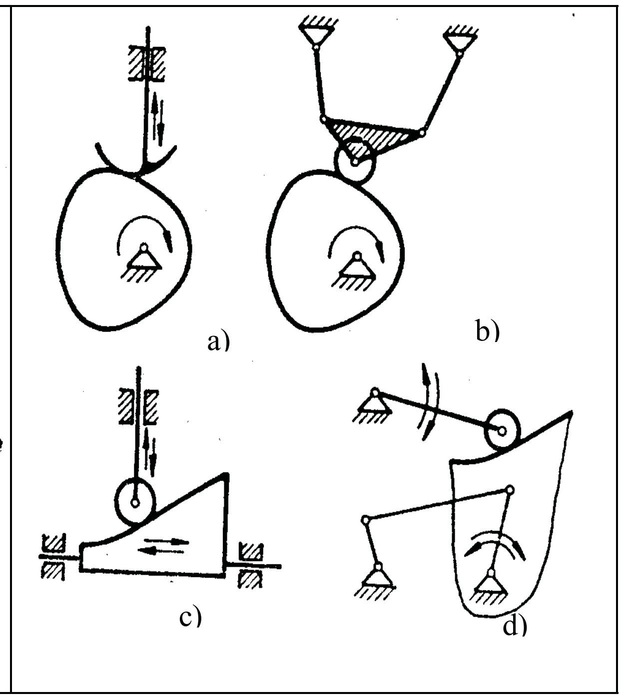
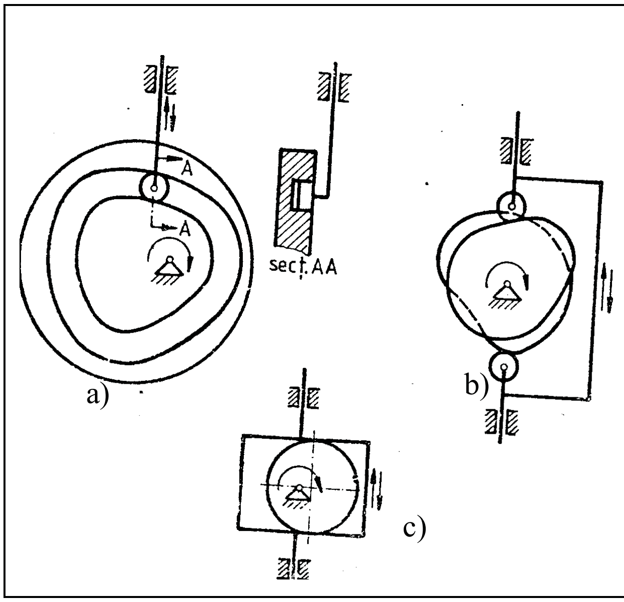


Figura 10.2



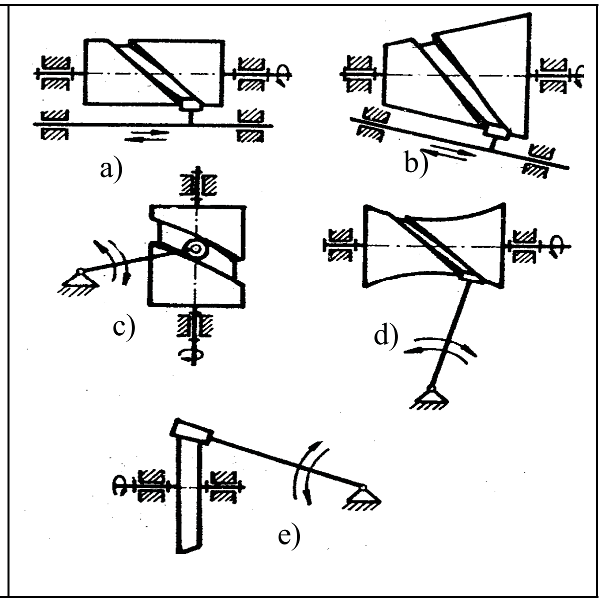


Figura 10.3 Figura 10.4

Clasificarea mecanismelor cu came se face după mai multe criterii:

1.după *forma constructivă a tachetului*:

- tachet cu vârf (fig.10.1a,10.1d)
- tachet cu talpă (fig 10c,10f,10.3c)
- tachet cu rolă (10.1b,10.1e,10.2b,10.2c,10.3a,etc)

2. după *caracterul mişcării tachetului*:

- tachet cu mişcare de translaţie (fig10.1a,10.1b,10.2a,etc)
- tachet cu mişcare cu mişcare oscilantă (fig 10.1d,10.1e,……,etc)
- tachet cu mişcare plan paralelă (fig10.2b)

3.după *caracterul mişcării camei*:

- camă rotativă (fig10.1,10.2a,10.2b,10.3,10.4)
- camă cu mişcare oscilantă (fig 10.2d)
- camă cu mişcare de translaţie (10.2c)

4. după *caracterul cuplei superioare camă-tachet*:

- cuplă unilaterală(10.1,10.2,10.4d)
- cuplă bilaterală (10.3,10.4a,10.4d,10.4c,10.4b)

5.după *forma corpului din care provine cama*:

- came plane (10.1,10.2,10.3)
- came cilindrice (10.4a,10.4c)

- came tronconice (10.4b)
- came globoidale (10.4d)

10.2 Analiza cinematică a mecanismelor cu came

Presupunem determinarea mişcării tachetului cunoscând profilul camei şi mişcarea acesteia.Există mai multe metode dintre care menţionăm:

- metoda diagramelor cinematice
- metoda ecuaţiilor vectoriale
- metoda înlocuirii cuplei superioare

Metoda *diagramelor cinematice* presupune determinarea printr-un procedeu oarecare a dependenţei dintre parametrul de poziţie al tachetului în funcţie de parametrul de poziţie al camei.
Se interpolează aceste date discrete iar funcţia de interpolare se derivează odată în raport cu timpul şi se obţine variaţia în timp a vitezei tachetului şi o a doua derivare permite obţinerea şi a aceeleraţiei tachetului.

Metoda *ecuaţiilor vectoriale* utilizează aceleaşi principii ca şi analiza cinematică a mecanismelor cu cuple inferioare prin metoda grafo-analitică. Ecuaţia de viteze pentru o cuplă superioară, (Fig. 10.5), este:

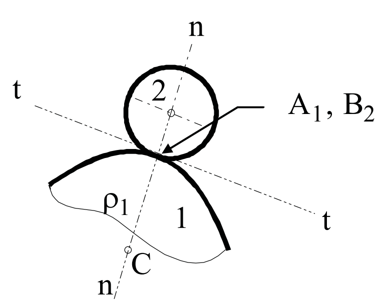


Figura 10.5

$$\overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{v}_{BA} \tag{10.1}$$

$$\overline{v}_{BA} \| tt$$

$\overline{v}_{BA}$ reprezintă viteza relativă dintre punctele A_1 şi B_2 ce se suprapun ca poziţie în cupla superioară şi este paralelă cu tangenta comună tt în punctul de contact şi are modulul necunoscut. În poligonul vitezelor ecuaţia 10.1 are drept corespondent ecuaţia:

$$\overline{p_v b} = \overline{p_v a} + \overline{ab} \tag{10.2}$$

Pentru acceleraţii se foloseşte relaţia ce leagă acceleraţiile celor două puncte, A de pe camă şi B de pe tachet. Ecuaţia este:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^n + \overline{a}_{BA}^c + \overline{a}_{BA}^r \tag{10.3}$$

unde $\overline{a}_{BA}^n$ reprezintă acceleraţia normală

$$\overline{a}_{BA}^n = -\left(\frac{v_{BA}}{\rho_1}\right)^2 \overline{CA} \begin{cases} a_{BA}^n = \dfrac{v_{BA}^2}{\rho_1}, \\ \| \text{ nn}, \\ A \to C \text{ (sens opus lui } \overline{CA}) \end{cases} . \tag{10.4}$$

$\overline{a}_{BA}^c$ acceleraţia Coriolis

$$\overline{a}_{BA}^n = 2\overline{\omega}_1 \times \overline{v}_{BA} \begin{cases} a_{BA}^c = 2\omega_1 v_{BA}, \\ \| \text{ nn}, \\ \text{sens rotim } \overline{v}_{BA} \text{ cu } \pi/2 \text{ in sens} \widetilde{\omega}_1 \end{cases} . \tag{10.5}$$

iar $\overline{a}_{BA}^n$ reprezintă viteza relativă dintre punctele A_1 şi B_2 ce se suprapun ca poziţie în cupla superioară şi este paralelă cu tangenta comună tt. Mărimea acesteia este necunoscută.

$$\bar{a}_{BA}^{n} \| tt.$$

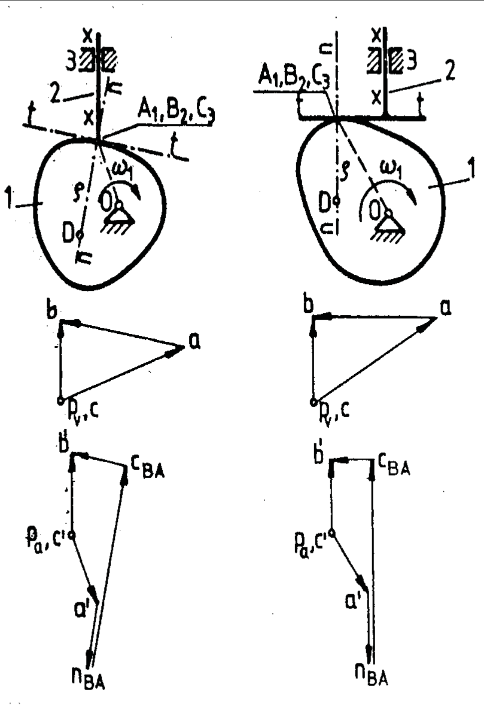
S-au notat cu nn direcția normalei la profilul camei cu punctul de contact și cu ρ_1 raza de curbură a profilului camei cu punctul de contact. Relația din poligonul de accelerații corespunzătoare relației 10.4 dar scrisă cu termenul necunoscut pe ultimul loc este:

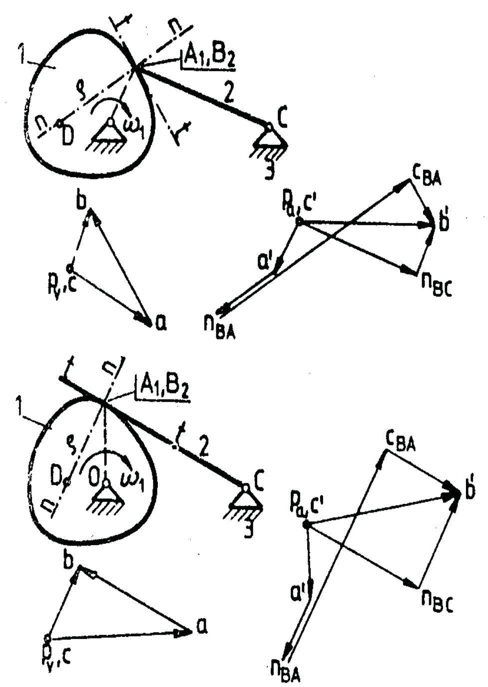
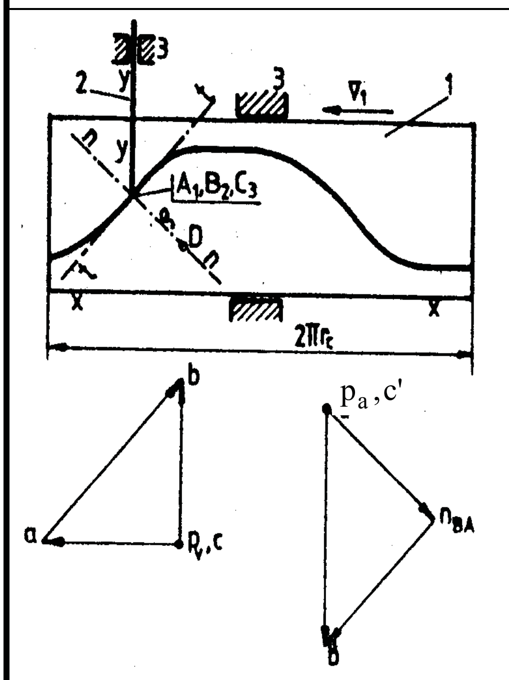
$$\overline{p_a b'} = \overline{p_a a'} + \overline{a' n_{BA}} + \overline{n_{BA} c_{BA}} + \overline{c_{BA} b'} \tag{10.6}$$

În tabelul 10.1 se prezintă analiza cinematică a celor mai utilizate mecanisme cu came.

TABELUL 10.1

Schema cinematică și poligoanele de viteze și accelerații	Ecuațiile de viteze	Ecuațiile de accelerații

	(III) $\bar{v}_B=\bar{v}_A+\bar{v}_{BA}$
	(II) $\bar{v}_B=\bar{v}_C+\bar{v}_{BC}$
	$\bar{v}_A(v_A=\omega_1 l_{OA}, \perp OA,$ se rotește $\overline{OA}$ cu 90° în sensul ω_1
	$\bar{v}_{BA}//tt$
	$\bar{v}_C=0$
	$\bar{v}_{BC}//xx$
		(III) $\bar{a}_B=\bar{a}_A+\bar{a}_{BA}^n+\bar{a}_{BA}^c+\bar{a}_{BA}^t$
		(II) $\bar{a}_B=\bar{a}_C+\bar{a}_{BC}^c+\bar{a}_{BC}^r$
		$\bar{a}_A(a_A=\omega_1^2 l_{OA}, //OA, A\to O)$
		$\bar{a}_{BA}^n(a_{BA}^n=v_{BA}^2/\rho, //nn, A\to D$-centrul de curbură)
		$\bar{a}_{BA}^c(a_{BA}^c=2\omega_1 v_{BA}, //nn,$ se rotește $\bar{v}_{BA}$ cu 90° în sensul $\omega_1)$
		$\bar{a}_{BA}^t//tt$
		$\bar{a}_C=0$, $\bar{a}_{BC}^c=0(\omega_2=0)$, $\bar{a}_{BC}^n//xx$

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr>
<td></td>
<td>(III) $\bar v_B=\bar v_A+\bar v_{BA}$
(I) $\bar v_B=\bar v_C+\bar v_{BC}$
$\bar v_A(v_A=\omega_1 l_{OA}, \perp OA$, se roteşte $\overline{OA}$ cu 90^o în snsul ω_1)
$\bar v_{BA}//tt$
$\bar v_C=0$, $\bar v_{BC}\perp BC$</td>
<td>(III) $\bar a_B=\bar a_A+\bar a^n_{BA}+\bar a^c_{BA}+\bar a^t_{BA}$
(I) $\bar a_B=\bar a_C+\bar a^n_{BC}+\bar a^t_{BC}$
$\bar a_A(a_A=\omega_1^2 l_{OA}, //OA, A\to O)$
$\bar a^n_{BA}(a^n_{BA}=v^2_{BA}/\rho, //nn, A\to D$-centrul de curbură)
$\bar a^c_{BA}(a^c_{BA}=2\omega_1 v_{BA}, //nn$, se roteşte $\bar v_{BA}$ cu 90^o în sensul ω_1)
$\bar a^t_{BA}//tt$
$\bar a_C=0$
$\bar a^n_{BC}(a^n_{BC}=\omega_2^2 l_{BC}, //BC, B\to C)$
$\bar a^t_{BC}\perp BC$</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>(III) $\bar v_B=\bar v_A+\bar v_{BA}$
(II) $\bar v_B=\bar v_C+\bar v_{BC}$
$\bar v_A(v_A=v_1=\omega_1 r_c, //xx$ sensul identic cu $\bar v_1$)
$\bar v_{BA}//tt$
$\bar v_C=0$, $\bar v_{BC}//yy$</td>
<td>(III) $\bar a_B=\bar a_A+\bar a^n_{BA}+\bar a^c_{BA}+\bar a^t_{BA}$
(II) $\bar a_B=\bar a_C+\bar a^c_{BC}+\bar a^r_{BC}$
$\bar a_A=0(\bar v_A=ct)$
$\bar a^n_{BA}(a^n_{BA}=v^2_{BA}/\rho, //nn, A\to D$-centrul de curbură)
$\bar a^c_{BA}=0(\omega_1=0)$, $\bar a^t_{BA}//tt$
$\bar a_C=0$, $\bar a^c_{BC}=0(\omega_2=0)$, $\bar a^r_{BC}//yy$</td>
</tr>
</table>

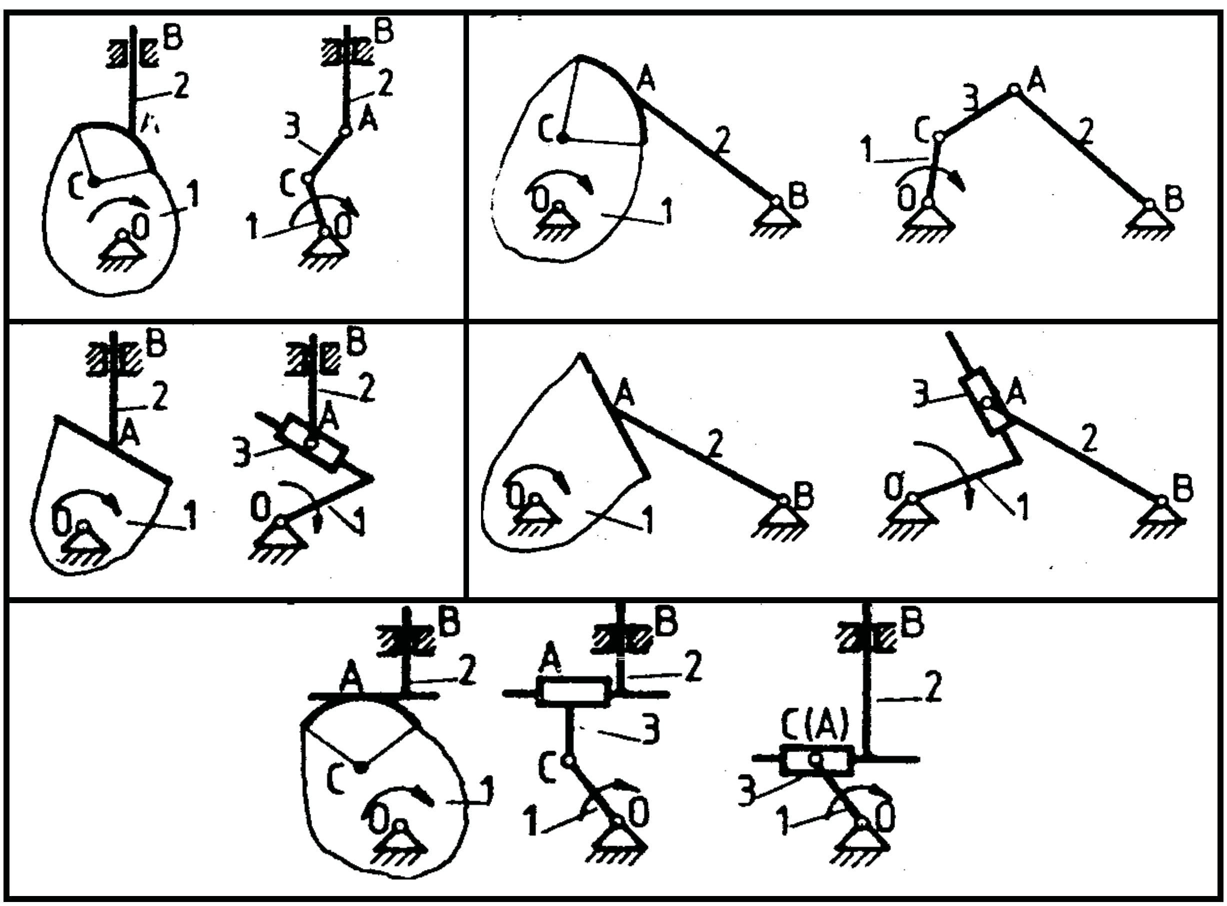
Ultimul caz corespunde mecanismului spaţial cu camă cilindrică şi tachet de translaţie care prin desfăşurarea cilindrului camei se transformă într-un mecanism plan cu camă în mişcare de translaţie uniformă cu viteza:

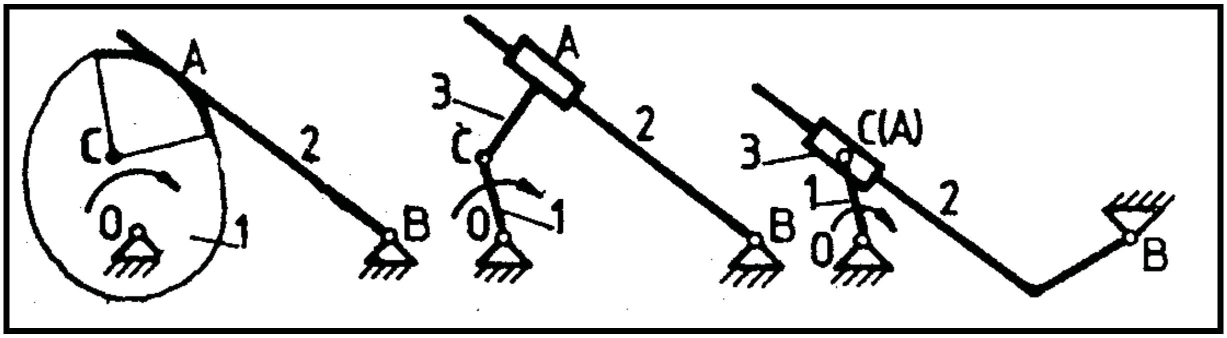
$$v = 2\pi\omega r_c \qquad (10.7)$$

unde r_c este raza cilindrului camei şi ω viteză unghiulară a camei cilindrice.

Analiza cinematică prin metoda transformării cuplei superioare presupune înlocuirea cuplei camă-tachet şi transformarea mecanismului într-un mecanism cu cuple inferioare după care se aplică una din metodele de studiu din capitolul IX . În TABELUL 10.2 se prezintă mecanismele înlocuitoare ale celor mai uzuale mecanisme cu came.

TABELUL 10.2





10.3 Aspecte specifice ale funcționării mecanismelor cu came

Dacă se consideră un mecanism cu tachet de translație cu rolă pentru exemplificare.

În funcționarea unui astfel de mecanism se disting patru faze, (Fig. 10.6):

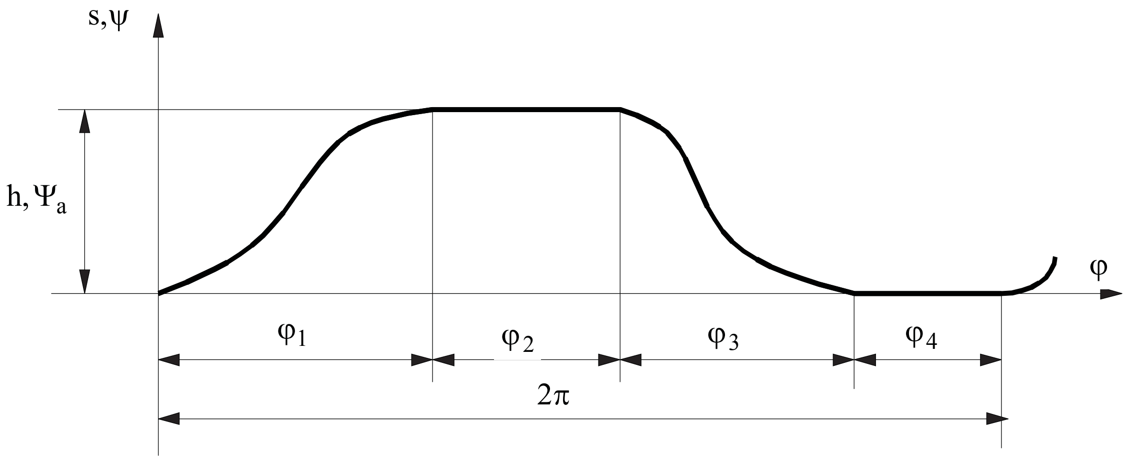


Figura 10.6

- faza de *ridicare* (tachetul se depărtează de centrul rolei)
- faza de *staționare superioară* (tachetul este imobil în poziția cea mai ridicată)
- faza de *coborâre* (tachetul se apropie de centrul camei)
- faza de *staționare inferioară* (tachetul se află imobil în poziția cea mai coborâtă)

În funcționarea mecanismului cu came fazele de staționare pot lipsi. Distanța dintre cele două poziții extreme se numeşte *cursă* a tachetului şi în cazul tachetului de translație se notează cu h.

În funcționarea unui mecanism cu came pot apărea următoarele fenomene nedorite:

a) *şocuri* care pot fi:

- *dure* atunci când viteza prezintă discontinuități finite;
- *moi* când accelerația prezintă discontinuități finite.

b) *autoblocarea* este fenomenul în care tachetul nu mai poate fi pus în mişcare oricât de mari ar fi forțele ce acționează asupra lui. Parametrul ce caracterizează acest fenomen este *unghiul de presiune* care se defineşte ca unghiul pe care îl face direcția unei forțe cu viteza punctului său de aplicație. Se notează cu α. Condiția de evitare a autoblocării este ca unghiul de presiune să nu depăşească o anumită valoare care se numeşte *unghi de presiune admisibil* şi se notează cu α_a. Condiția de evitare a autoblocării este exprimată matematic prin inegalitatea:

$$|\alpha| \leq \alpha_a \tag{10.8}$$

La mecanismele cu tachet cu talpă acest unghi, după cum se poate uşor observa, este întotdeauna nul. Unghiul de presiune se exprimă funcție de parametrii constructivi şi cinematici ai mecanismului. Complemenul unghiului de presiune se numeşte *unghi de transmitere* şi se notează cu γ. Un alt aspect este legat de prezența rolei în construcția mecanismului. Dacă se face calculul gradului de mobilitate al unui mecanism cu tachet cu rolă se obține pentru valoarea gradului de mobilitate valoarea M=2. Rezultatul este contradictoriu la prima vedere dar rola are o mişcare pasivă de rotație în jurul axei proprii care nu influențează mişcarea tachetului. Blocarea rolei nu modifică mişcarea tachetului dar transformă frecarea de alunecare dintre camă şi tachet în frecare de rostogolire, care este mult mai avantajoasă din punct de vedere al uzurii şi pierderii de energie.

Se disting două profile, (Fig 10.7):

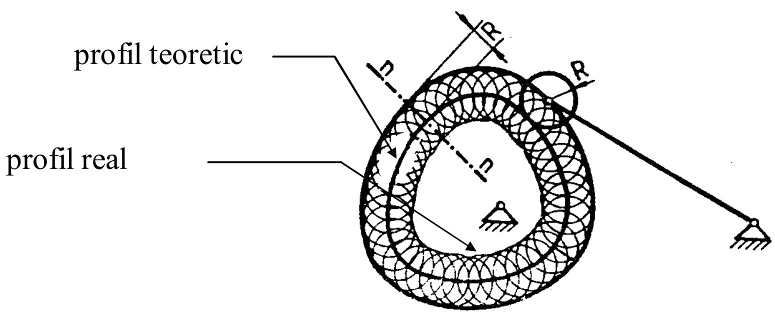


Figura 10.7

- *profilul teoretic* – este curba pe care o descrie centrul rolei
- *profilul real* – înfăşurătoarea poziţiilor succesive ale rolei când centrul acesteia se deplasează pe profilul teoretic, (Fig. 10.7)

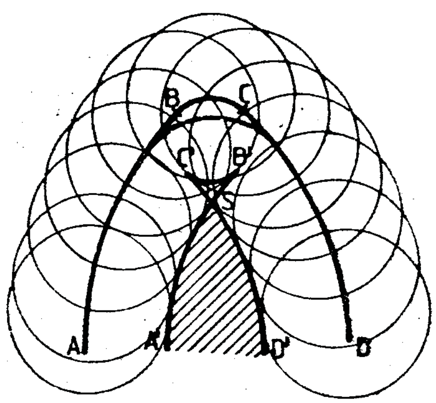


Figura 10.8

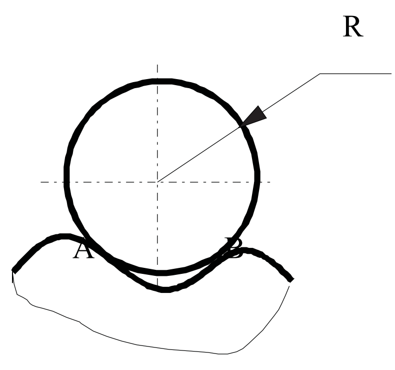


Figura 10.9

Profilul real poate prezenta fenomenul de *subtăiere* când curbura este pozitivă, (Fig.10.8), iar când curbura este negativă rola nu va putea urmări profilul real contactul mutându-se brusc din A în B ducând la şocuri şi la nerespectarea legii de mişcare impuse, (Fig.10.9). Acelaşi fenomen apare şi în cazul mecanismelor cu tachet cu talpă plană. Aici necesitatea ca tachetul să poată urmări (să fie tangent) la profilul camei impune ca profilul să fie convex în raport cu polul pe toată circumferința camei, (Fig.10.10).

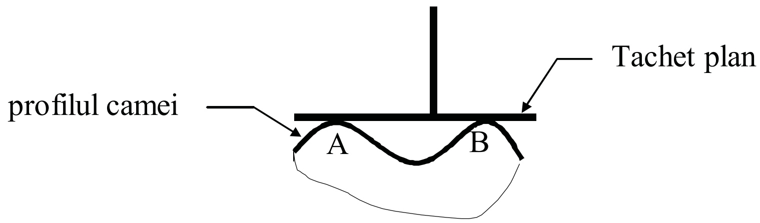


Figura 10.10

Legea de mişcare impusă tachetului poate conduce la apariția şocurilor în funcționarea mecanismelor cu came. În Fig. 10.11,10.12,10.13 se prezintă diagramele de variație pentru spațiu viteză şi accelerație în cazul legilor de mişcare cu viteza constantă, cu accelerație constantă şi cu accelerație sinusoidală.

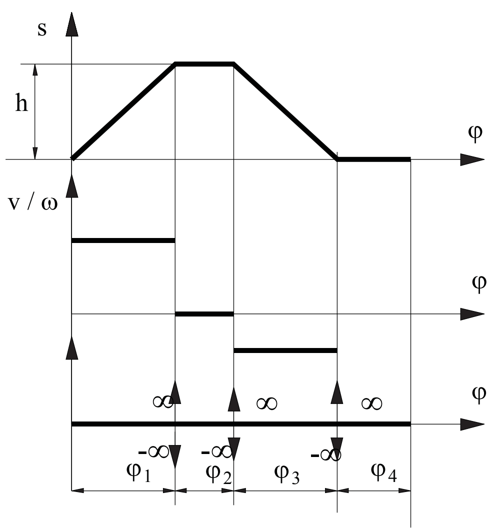


Figura 10.11

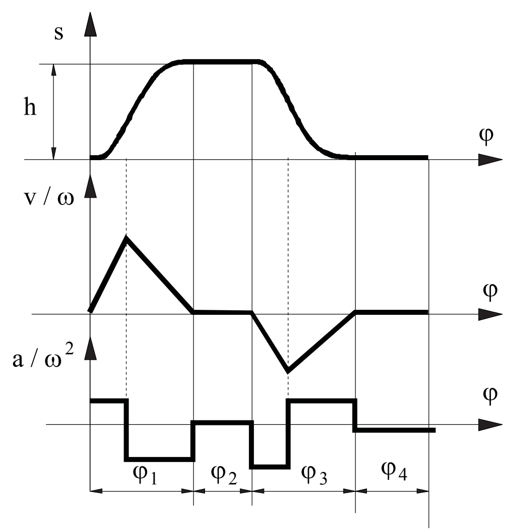


Figura10.12

Legea de mişcare cu viteză uniformă prezintă şocuri dure, cea cu accelerație constantă şocuri moi iar cea cu accelerație sinusoidală nu prezintă şocuri. Acceleraţia constantă este de fapt acceleraţie constantă pe porţiuni după cum se vede din grafic. Acest lucru este absolut necesar deoarece dacă acceleraţia ar avea o valoare constantă şi nenulă pe întreg intervalul de ridicare atunci viteza ar avea o variaţie monotonă şi nu ar putea trece de cele două prin zero (la capetele intervalului). În literatura de specialitate se prezintă expresiile diferitelor legi de mişcare cu aprecieri asupra comportării cinematice.

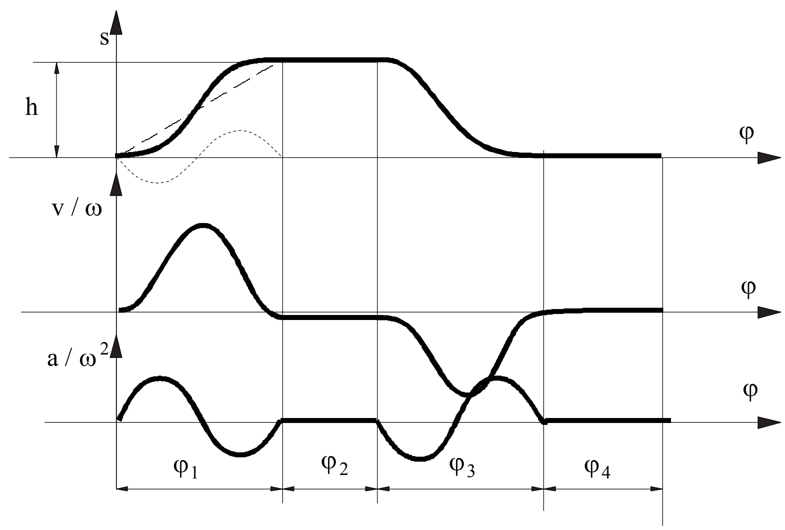


Figura 10.13

În general se propune o anumită formă a acceleraţiei tachetului şi se integrează de două ori iar apoi se determină constantele de integrare din condiţiile ca la capetele intervalului viteza să fi nulă şi deplasarea între începutul şi sfârşitul fazei să aibă valoarea impusă.

10.4. Sinteza mecanismelor cu came presupune trei etape

Sinteza unui mecanism cu camă presupune parcurgerea următoarelor etape:

- *adoptarea legii de mişcare*

- *adaptarea parametrilor geometrici de bază*
- *trasarea profilului camei.*

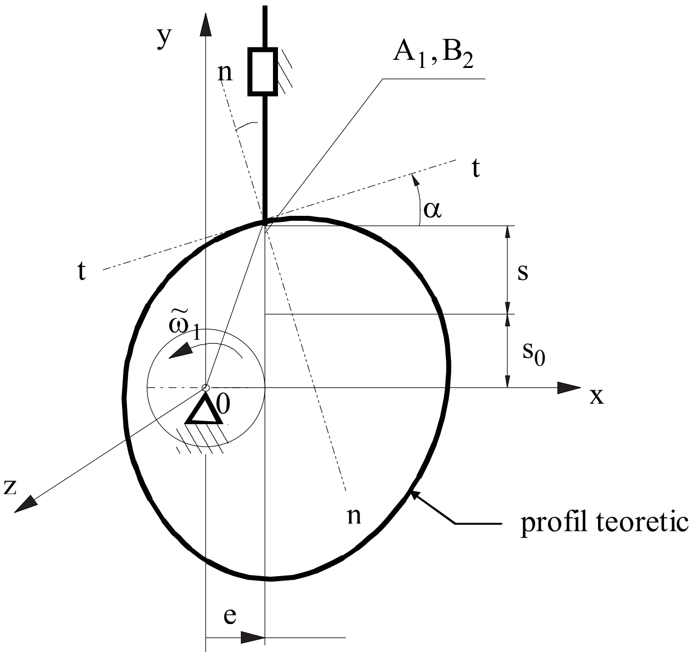
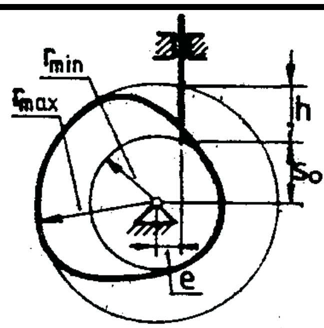
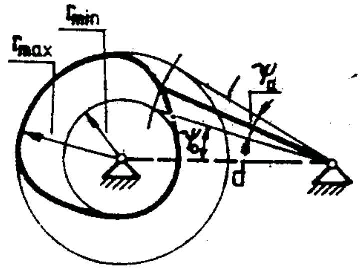
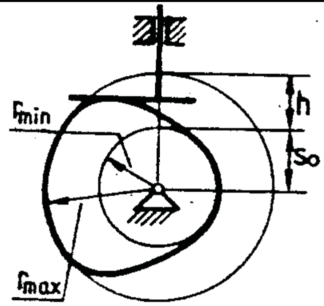
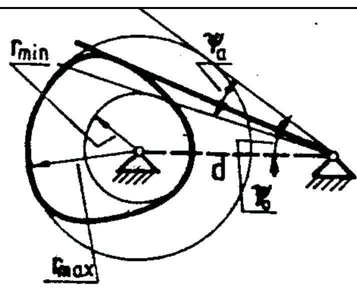
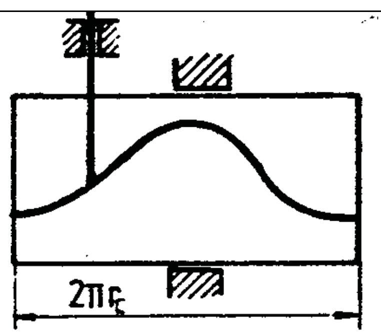


Figura 10.14

TABELUL 10.2

Nr. crt.	Schema şi parametrii geometrici de bază	Parametrii geometrici de bază	
1		e, s_0	$r_{min} = \sqrt{e^2 + s_0^2}$ $r_{max} = \sqrt{e^2 + (s_0 + h)^2}$

2		l, d., ψ_0	$r_{min} = \sqrt{\ell^2 + d^2 - 2\ell d\cos(\psi_0)}$ $r_{max} = \sqrt{\ell^2 + d^2 - 2\ell d\cos(\psi_0 + \psi_a)}$
3		s_0	$r_{min} = e$ $r_{max} = s_0 + e$
4		d, ψ_0	$r_{min} = d\sin(\psi_0)$ $r_{max} = d\sin(\psi_0 + \psi_a)$
5		r_c	–

Adoptarea legii de mişcare se face funcție de cerințele tehnologice şi de funcționare dinamică a mecanismului. Nu se admit şocurile dure. *Parametri geometrici de bază* sunt caracteristici constante care împreună cu legea de mişcare definesc din punct de vedere constructiv mecanisme. În tabelul 10.2 se prezintă parametri geometrici de bază ai principalelor tipuri de mecanisme cu came şi relațiile de calcul ale razelor extreme ale camei. Adoptarea parametrilor geometrici de bază este o problemă de optimizare. Criteriul urmărit este gabaritul minim al mecanismului şi buna funcţionare a acestuia. Pentru aceleaşi mecanisme cu camă rotativă şi tachet de translaţie cu vârf se determină expresia unghiului de presiune. Fig. 10.14 *Unghiul de presiune* α, se formează între tangenta la profil tt şi raza vectoare corespunzătoare punctului de contact dar se formează şi între direcţia tachetului şi normala la profilul camei în punctul de contact. Scriem ecuaţia 10.1 sub forma

$$\bar{v}_B - \bar{v}_A = \bar{v}_{BA}; \quad \bar{v}_{BA} \| tt. \tag{10.9}$$

$$\bar{v}_B = v_B \bar{j}; \ \bar{v}_A = \bar{\omega} \times \overline{OA} = -\omega_1 \left(\overline{OA}\right)_y \bar{i} + \omega_1 \left(\overline{OA}\right)_x \bar{j} \tag{10.10}$$

$$\bar{v}_{BA} = \omega_1 \left(\overline{OA}\right)_y \bar{i} + \left[\bar{v}_B - \omega_1 \left(\overline{OA}\right)_x\right] \bar{j} \tag{10.11}$$

$$tg(\alpha) = \frac{\bar{v}_{BA}\bar{j}}{\bar{v}_{BA}\bar{i}} = \frac{v_B - \omega_1 (\overline{OA})_x}{\omega_1 (\overline{OA})_y} \tag{10.12}$$

Din Figura 10.14 se determină proiecţiile pe axe ale vectorului $\overline{OA} = (\overline{OA})_x \bar{i} + (\overline{OA})_y$

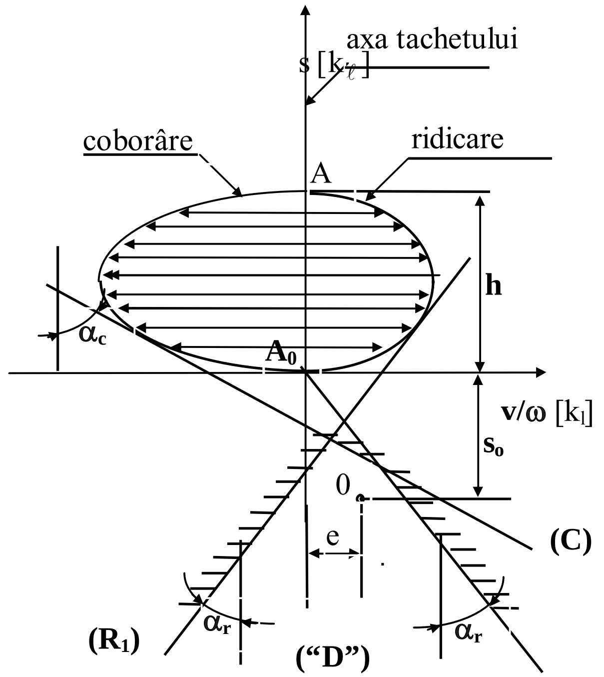
$$(\overline{OA})_x = e; \qquad (\overline{OA})_y = s + s_0 . \tag{10.13}$$

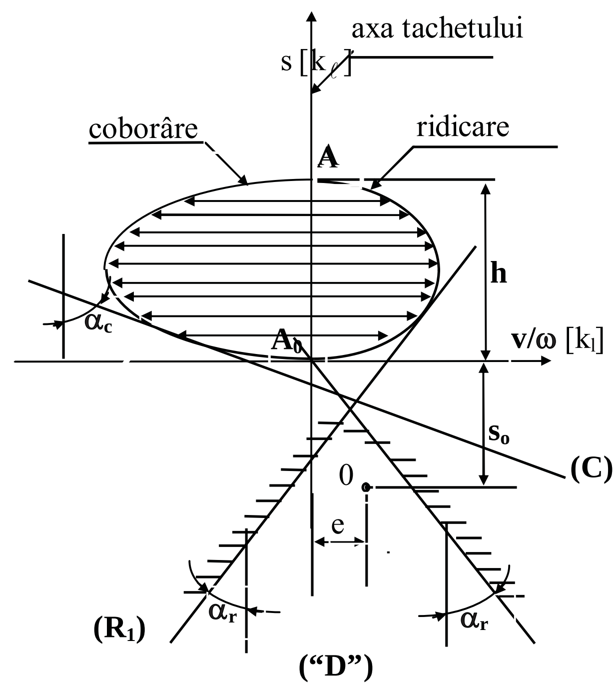
Expresia unghiului de presiune este

$$tg(\alpha) = \frac{\dfrac{v}{\omega} - e}{s + s_0}; \ v = v_B, \omega = \omega_1 \tag{10.14}$$

Condiţiile de evitare a autoblocării trebuie verificate atât la ridicare cât şi la coborâre:

$$\begin{cases} |\alpha| \le \alpha_{ar} \\ |\alpha| \le \alpha_{ac} \end{cases} \qquad (10.)$$





unde α_{ar} este unghiul admisibil la ridicare iar α_{ac} unghiul admisibil la coborâre.

Pentru o anumită lege de mişcare şi o anumită viteză a camei relațiile sistemului de inecuații determină în planul (e,s_0) un domeniu în care por fi adoptați parametri geometrici de bază. Se prezintă mai jos graficul pentru alegerea parametrilor geometrici de bază pentru mecanismul cu camă rotativă şi tachet de translație. Centrul camei va trebui adoptat în domeniul "D"situat sub dreptele "R_1", "R_2" şi "C_1"Fig. 10.15. Alegerea se va face aşa încât r_{max}să aibă o valoare cât mai mică.

Figura 10.15

Trasarea profilului camei se face prin procedeul inversării mişcărilor. Se consideră tachetul în poziţia iniţială la începutul fazei de ridicare A_0B_0, (Fig. 10.15).

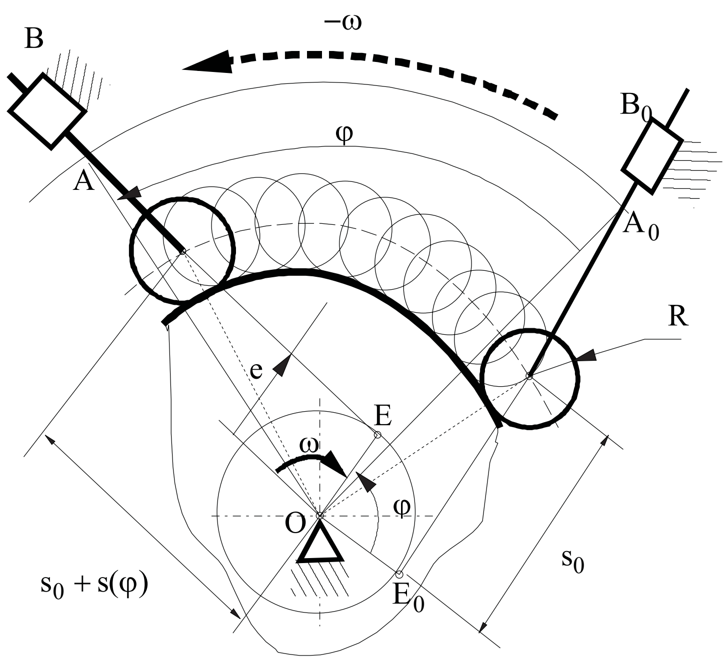


Figura 10.16

Se trasează un cerc de rază oarecare ce intersectează axa tachetului în A_0. De la raza OA_0 se măsoară unghiul φ în sens invers rotaţiei camei obţinând raza OA ($A_0OA=\varphi$). Prin A se trasează axa tachetului în noua poziţie tangentă la cercul excentricităţii. Pe această dreaptă se măsoară segmentul $ET=S_0+S(\varphi)$ determinând astfel centrul rolei T. Construcţia se repetă pentru un set de valori a unghiului φ. Profilul teoretic se obţine unind cu o linie continuă punctele notate cu T. Pentru fazele de staţionare profilul este format din arce de cerc. Profilul real se obţine ca înfăşurare a poziţiilor succesive ale rolei când centrul acesteia se deplasează pe profilul real, (Fig.10.16).

XI Mecanisme cu roți dințate

11.1.Mecanisme cu roți dințate. Definiție. Exemple. Clasificare.

Mecanismele cu roți dințate sunt mecanisme la care transmiterea mişcării de rotație se face prin intermediul a două suprafețe numite flancuri între care se formează o cuplă superioară. În Fig. 11.1 sunt prezentate diferite forme constructive de mecanisme cu roți dințate.

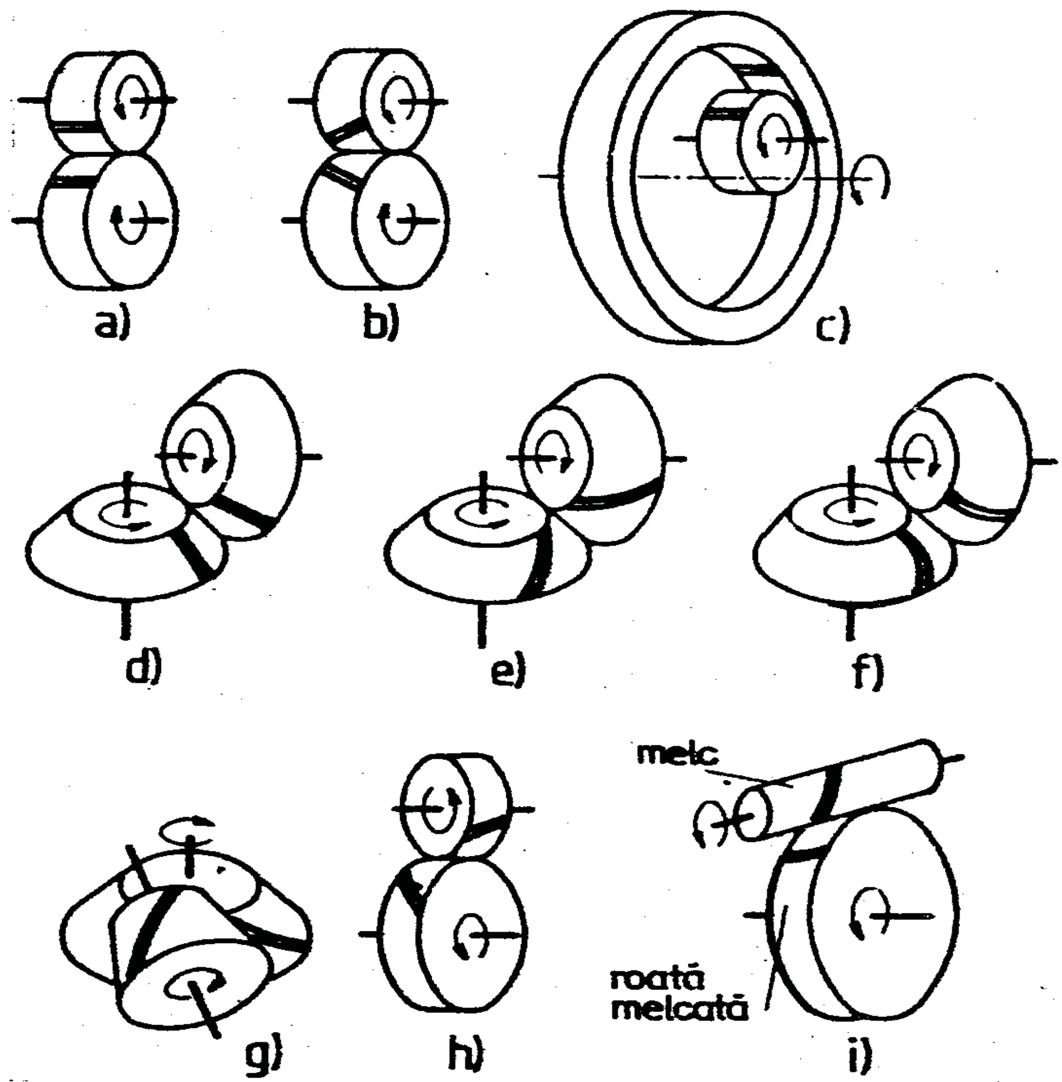


Fig.11.1

a) angrenaj cilindric exterior paralel cu dinți drepți;

b) angrenaj cilindric paralel exterior cu dinți înclinați;

c) angrenaj cilindric cu dinți drepți cu angrenare exterioară;

d) angrenaj conic cu dinți drepți;

e) angrenaj conic cu dinți înclinați;

f) angrenaj conic cu dinți curbi;

g) angrenaj hipoid format cu roți conice

h) angrenaj cilindric încrucişat format cu roți cilindrice;

i) angrenaj melc-roată melcată.

Se consideră o roată dințată cilindrică cu dantură dreaptă, (Fig. 11.2). Pe această figură apar:

d *diametrul de divizare*(centroida mişcării relative);

p *pasul de divizare* definit ca lungimea arcului măsurat pe cercul de divizare limitat de două profile omoloage a doi dinți consecutivi;

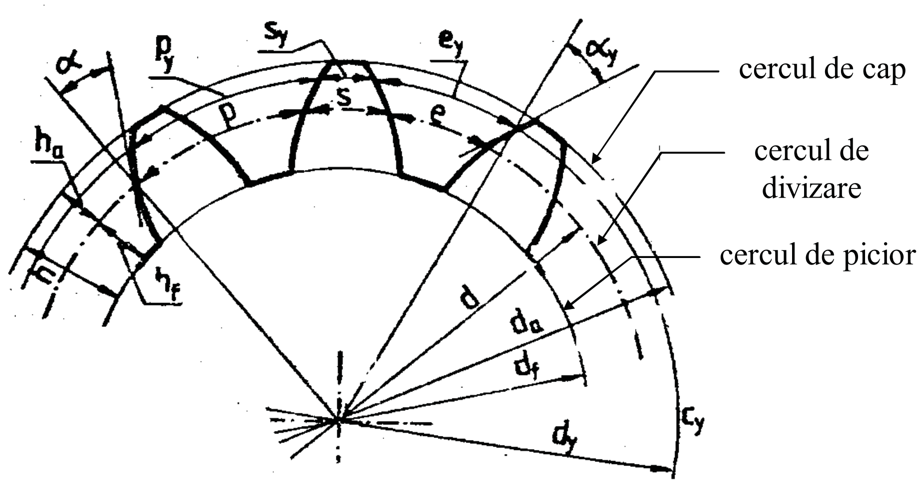


Figura 11.2

d_a *diametrul cercului de cap* (cercul tangent la vârfurile dinților);

d_f *diametrul cercului de picior* (cercul tangent la fundul golurilor dintre dinți)

h_a *înălțimea capului dintelui* în raport cu cercul de divizare;

h_f *înălțimea piciorului dintelui* în raport cu cercul de divizare;

s *arcul dintelui pe cercul de divizare* (lungimea arcului pe cercul de divizare dintre flancurile unui dinte);

e *arcul golului dintre dinți pe cercul de divizare* (lungimea arcului pe cercul de divizare limitat de profilele unui gol);

 unghiul de presiune al profilului pe cercul de divizare definit ca unghiul formate între tangenta la profil în punctul de intersecție al acestuia cu cercul de divizare şi raza vectoare a punctului respectiv)

Aceeaşi parametri se pot defini pe un cerc oarecare (c_y) indexând parametrii corespunzători cu indicele "y". Pentru cercul de cap (c_a) indexarea se face cu indicele "a" iar pe cercul de picior (c_f) indexarea se va face cu litera "f".

Angrenajul este mecanismul elementar obținut prin punerea în contact a danturilor a două roți dințate. Cinematica unui angrenaj presupune determinarea raportului de transmitere i_{12} al acestuia care se defineşte:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \qquad (11.1)$$

unde $\omega_1$este viteza unghiulară a elementului conducător iar$\omega_2$este viteza unghiulară a celui condus.

11.2 Legea fundamentală a angrenării. Evolventa. Definiție. Proprietăți

Se consideră două rigide în mişcare plan paralelă şi fie I_1 şi I_2 centrele instantanee de rotație corespunzătoare mişcării acestora. Se numeşte *centru instantaneu al mişcării relative* un punct I_{12}, în care se suprapun două puncte aparținând celor două rigide şi care la momentul considerat au vitezele egale, (Fig. 11.3).

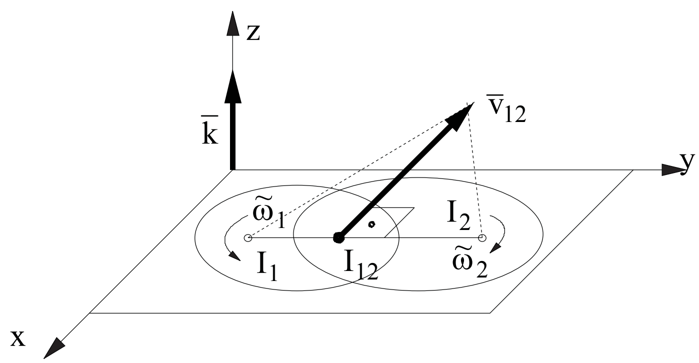


Figura 11.3

Se exprimă viteza punctului I_{12} în funcție de vitezele punctelor I_1 şi I_2 ($\overline{v}_{I_1} = 0$, $\overline{v}_{I_2} = 0$)

$$\overline{v}_{I_{12}} = \overline{v}_{I_1} + \overline{\omega}_1 \times \overline{I_1 I_{12}} = \overline{v}_{I_2} + \overline{\omega}_2 \times \overline{I_2 I_{12}} \tag{11.2}$$

Rezultă dacă se ține seama că: $\overline{\omega}_1 = \overline{k}\,\omega_1$; $\overline{\omega}_2 = \overline{k}\,\omega_2$;

$$\omega_1 \overline{k} \times \overline{I_1 I_{12}} = \omega_2 \overline{k} \times \overline{I_2 I_{12}}$$

sau

$$\overline{k} \times \left(\omega_1 \overline{I_1 I_{12}} - \omega_2 \overline{I_2 I_{12}}\right) = 0 \tag{11.3}$$

Relația 11.3 are loc numai dacă al doilea factor al produsului vectorial este nul, deoarece factorii nu pot fi paraleli iar $\overline{k} \neq 0$. Singura posibilitate este:

$$\omega_1 \overline{I_1 I_{12}} - \omega_2 \overline{I_2 I_{12}} = 0 \tag{11.4}$$

Relația 11.14 arată că vectorii $\overline{I_1I_{12}}$ și $\overline{I_2I_{12}}$ sunt coliniari, adică punctul I_{12} se găsește pe dreapta $\overline{I_1I_2}$.

Pentru două roți cu axe fixe centrele lor sunt centre instantanee de rotație (I_1 și I_2 au poziție fixă). Dacă ω_1 și ω_2 sunt constante atunci și punctul I_{12} va avea o poziție fixă și va descrie în sistemele de referință legate de cele două roți două cercuri (c_{w1}) și (c_{w2}) de raze r_{w1} respectiv r_{w2} numite *cercuri de rostogolire*. În cazul angrenării exterioare cele două cele două viteze unghiulare au sensuri contrare iar relația 11.4 proiectată pe direcția axelor celor două roți conduce la:

$$\omega_1\overline{I_1I_{12}} - (-\omega_2)\overline{I_2I_{12}} = 0 \tag{11.5}$$

sau

$$\omega_1 I_1I_{12} = -\omega_2 I_2I_{12} \tag{11.6}$$

Relația 11.6 arată că în cazul angrenării exterioare punctul I_{12} se află între I_1 și I_2 și împarte acest segment în raport invers cu raportul de transmitere deoarece:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{I_2I_{12}}{I_1I_{12}}. \tag{11.7}$$

Se consideră profilele a două roți dințate în angrenare ,(Fig.11.4).

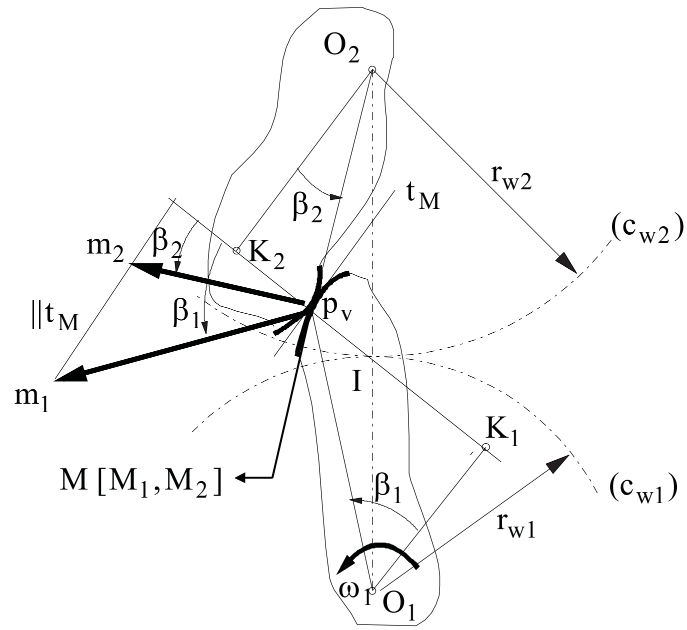


Figura 11.4

Ecuația de viteze caracteristică mişcării punctelor M_1 şi M_2 din cupla superioară dintre cele două flancuri

$$\bar{v}_{M_2} = \bar{v}_{M_1} + \bar{v}_{M_1M_2} \tag{11.8}$$

$\bar{v}_{M_2}$ este perpendiculară pe O_2M, $\bar{v}_{M_1}$ este perpendiculară pe O_1M iar $\bar{v}_{M_2M_1}$ paralelă cu tangenta la profile t_M în punctul de contact. Rezolvarea ecuației 11.8 se face pe ale grafică construind poligonul vitezelor direct pe mecanism cu polul vitezelor p_v în punctul M. Din triunghiul vitezelor rezultă:

$$v_{M_2} = k_v(p_v m_2);\; v_{M_1} = k_v(p_v m_1); \tag{11.9}$$

Condiția ca pe direcția normalei K_1K_2 la profile proiecțiile celor două viteze să fie egale (altfel profilele ar intra unul în celălalt) se scrie:

$$v_{M_1} \cos(\beta_1) = v_{M_2} \cos(\beta_2) \qquad (11.10)$$

sau

$$\omega_1 O_1 M_1 \cos(\beta_1) = \omega_2 O_2 M_2 \cos(\beta_2) \qquad (11.10)$$

cu observația

$$O_1 M_1 \cos(\beta_1) = O_1 K_1, \quad O_2 M_2 \cos(\beta_2) = O_2 K_2$$

rezultă

$$\omega_1 O_1 K_1 = \omega_2 O_2 K_2 \qquad (11.12)$$

Triunghiurile O_1K_1M şi O_2K_2M sunt asemenea. Din această asemănare se poate exprima raportul de transmitere

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2 I}{O_1 I} . \qquad (11.13)$$

Pe baza relației 11.13 se poate enunța *legea fundamentală a angrenării (LFA)*

pentru ca două profile să asigure un raport de transmitere constant este necesar şi suficient ca normala comună în punctul de contact să treacă tot timpul printr-un punct fix numit polul angrenării.

Cu ajutorul LFA cunoscând unul dintre profile, distanța dintre axe şi raportul de transmitere se poate determina profilul dintelui roți conjugate. Din motive tehnologice este de preferat ca profilul conjugat să fie o curbă de aceeaşi natură cu profilul inițial. Dintre toate curbele cea care răspunde acestei cerințe este evolventa cercului.

Evolventa cercului este curba descrisă de un punct al unei drepte mobile care se rostogoleşte fără alunecare peste u cerc fix numit *cerc de bază,* (Fig. 11.5).

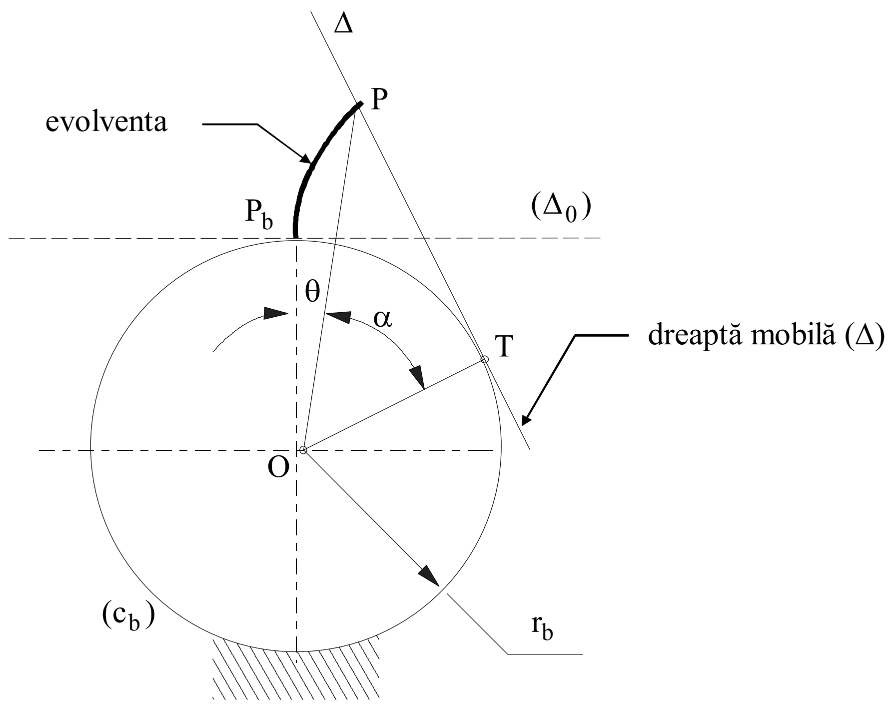


Figura 11.5

Deducerea ecuațiilor evolventei se face în coordonate polare parametrice, utilizând drept parametru unghiul de presiune . Din triunghiul dreptunghic OPT.

$$r = OP = \frac{r_b}{\cos(\alpha)} \ . \qquad (11.14)$$

Condiția de rostogolire fără alunecare dintre dreapta mobilă D şi cercul de bază (c_b):

$$\begin{gathered} arc(PB) = segment(PT) \Rightarrow \\ r_b(\theta + \alpha) = r\,tg(\alpha) \Rightarrow \theta = tg(\alpha) - \alpha \quad \alpha[rad] \end{gathered} \qquad (11.15)$$

Ecuațiile evolventei:

$$\begin{cases} r = r_b / \cos(\alpha), \\ \theta = \tan(\alpha) - \alpha = \mathrm{inv}(\alpha). \end{cases} \tag{11.16}$$

Funcția

$$\theta = \mathrm{inv}(\alpha) = \mathrm{tg}(\alpha) - \alpha$$

se numeşte *involută* sau *evolventă* de argumentul □. În geometrie un cerc era caracterizat prin centru şi rază . În teoria angrenajelor un cerc se poate specifica cu ajutorul cercului de bază şi a unghiului de presiune al unei evolvente generate cu ajutorul acestui cerc, în punctul de pe evolventă prin care dorim să treacă cercul respectiv.

Din definiție şi din Fig.11.5 rezultă următoarele proprietăți ale evolventei:

- normala la evolventă este întotdeauna tangentă la cercul de bază;

- raza de curbură a evolventei într-un punct curent este egală cu distanța măsurată pe normală de la punctul respectiv şi până la punctul de tangență cu cercul de bază al dreptei generatoare.

11.3 Cremaliera de referință cu dinți drepți. Definirea roții dințate cilindrice cu dinți drepți cu ajutorul cremalierei de referință

Cremaliera de referință este prin definiție limita spre care tinde o roată dințată atunci când numărul ei de dinți tinde la infinit. Se poate arăta că pentru dantura în evolventă forma flancului dintelui este rectilinie. Forma şi dimensiunile cremalierei de referință sunt standardizate.

Dreapta de referință (Δ_0) este dreapta paralelă cu direcția de deplasare a cremalierei în lungul căreia grosimea dintelui este egală cu grosimea golului dintre doi dinți, (Fig.11.6).

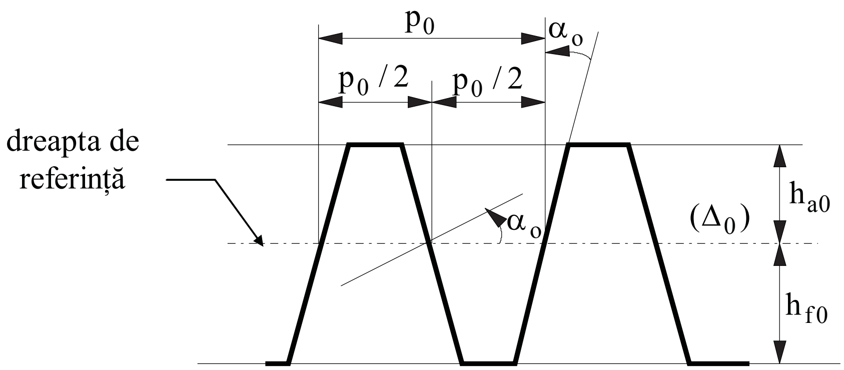


Figura 11.6

În Fig. 11.6 sunt puşi în evidență parametrii caracteristici ai cremalierei de referință:

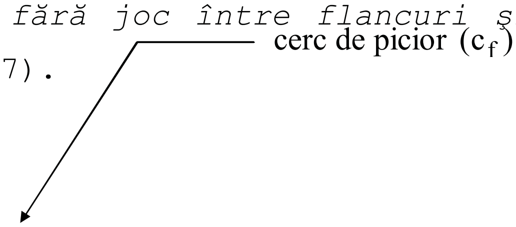
- p_0 - *pasul* cremalierei;
- $\alpha_0 = 20^o$ - *unghiul de înclinare al profilului* față de dreapta de referință;
- h_{a0} - *înălțimea de referință a capului dintelui*;
- h_{f0} .-. *înălțimea de referință a piciorului dintelui*.

Toți parametrii geometrici cu dimensiune de lungime se exprimă cu ajutorul unei mărimi cu dimensiune de lungime numită *modul* , notat cu m. Valorile modulului sunt reglementate prin standarde. Astfel

$$
\begin{aligned}
p_0 &= \pi m; \\
h_{a0} &= h_{a0}^{*} m;\ h_{a0}^{*} = 1\ (\text{STAS}) \\
h_{f0} &= (h_{ao}^{*} + c_0^{*})m;\ c_0^{*} = 0.25\ (\text{STAS})
\end{aligned}
\qquad (11.17)
$$

h_{a0}^{*} se numeşte *coeficient al înălțimii de referință al capului dintelui* iar c_0^{*} *coeficient al jocului radial.*

Definirea roții dințate cu ajutorul cremalierei de referință se face din condiția de angrenare fără joc între flancuri și cu joc radial standardizat.(Fig.11.7).



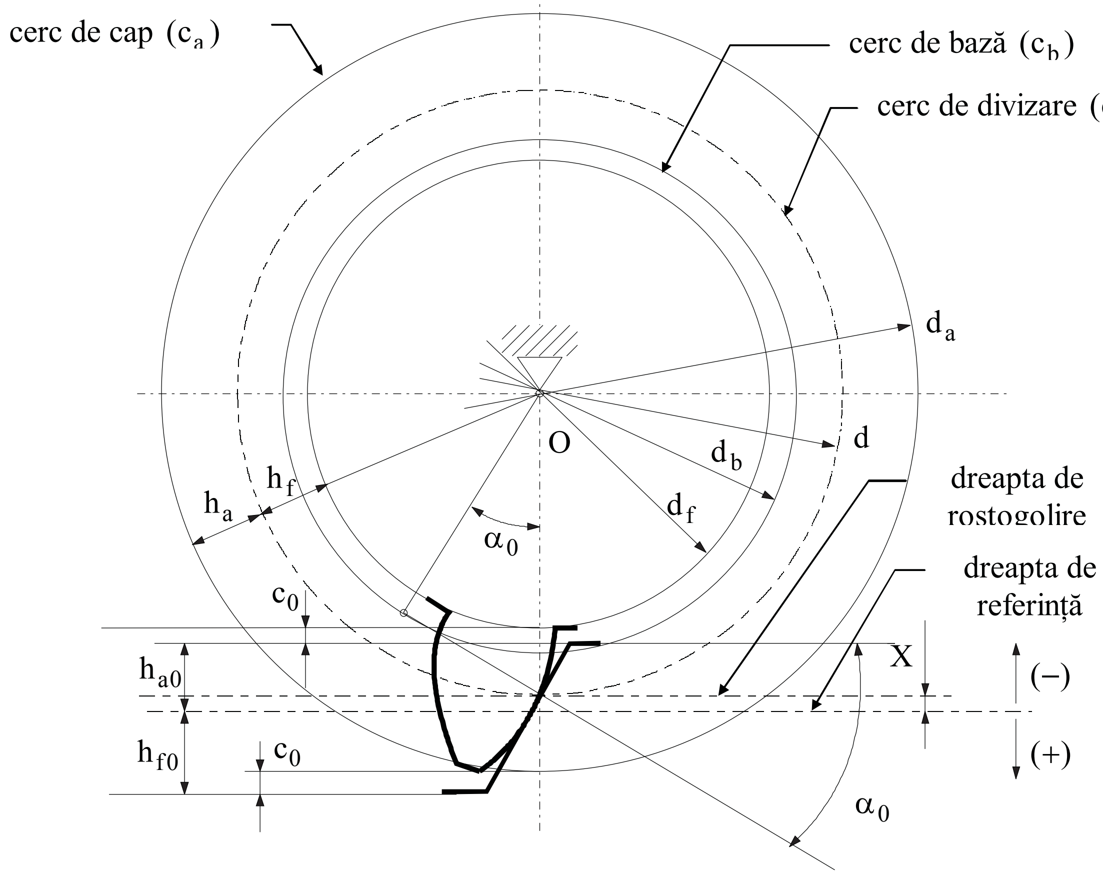


Figura 11.7

Cercul de rostogolire care intervine la definirea roții se numeşte *cerc de divizare* c_d. Poziția cremalierei de referință în procesul de definire este dată de distanța dintre dreapta de rostogolire şi dreapta de referință. Această distanță se notează cu X şi se numeşte *deplasarea danturii*. Convenția de semn pentru deplasarea danturii este următoarea :

x=0 dreapta de referință tangentă la cercul de divizare.

x<0 dreapta de referință intersectează cercul de divizare.

x>0 dreapta de referință este exterioară cercului de divizare.

Deplasarea danturii X se exprimă cu ajutorul *coeficientului de deplasare* x.

$$X = mx . \qquad (11.18)$$

Pasul pe cercul de divizare p. Datorită rulării dreptei de rostogolire a cremalierei peste cercul de divizare cei doi paşi sunt egali :

$$p = p_w = p_0. \tag{11.19}$$

Din cele arătate se desprind două concluzii:

1) geometria unei roți dințate cu dantură în evolventă este determinată de trei parametri:

- numărul de dinți z
- modulul m,
- coeficientul de deplasare.

- 2) toate roțile dințate definite cu ajutorul aceleiaşi cremaliere formează un *sistem de roți dințate* şi angrenează cu respectare legii fundamentale a angrenării. De aici ***condiția ca două roți cilindrice cu dantură în evolventă să poată angrena este ca să posede acelaşi modul.***

Diametrul de divizare d:

$$d = \frac{zp}{\pi} = \frac{z\pi m}{\pi} = mz. \tag{11.21}$$

Înălțimea de divizare a capului dintelui h_a :

$$h_a = h_{f0} - c_0 + X = h_{a0} + X = m(h^*_{a0} + x). \tag{11.21}$$

Înălțime de divizare a piciorului dintelui h_f :

$$h_f = h_{a0} + c_0 - X = (h^*_{a0} + c^*_0 - x)m\ . \tag{11.22}$$

Diametrul de cap d_a

$$d_a = d + 2h_a = m(z + 2h^*_{a0} + 2x). \tag{11.23}$$

Diametrul de picior d_f:

$$d_f = d - 2h_f = m(z - 2h^*_{a0} - 2c^*_0 + 2x). \tag{11.24}$$

Arcul dintelui pe cercul de divizare s. Datorită rulării fără alunecare dintre dreapta de rostogolire a cremalierei și cercul de divizare, grosimea dintelui pe acest cerc este egală cu lățimea golului lui dintre doi dinți pe dreapta de rostogolire din Fig.11.8.

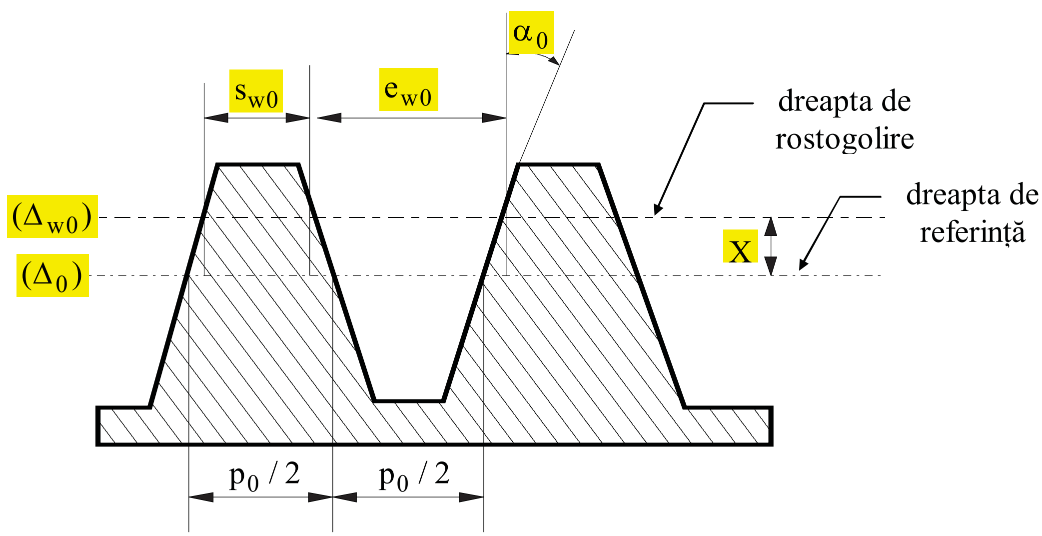


Figura 11.8

$$s = e_{w0} = \frac{p_0}{2} + 2X\mathrm{tg}(\alpha_0) = \left(\frac{\pi}{2} + 2x\mathrm{tg}(\alpha_0)\right)m\,. \tag{11.25}$$

Arcul golului dintre doi dinți pe cercul de divizare e, este:

$$e = p - s = \pi m - \left(\frac{\pi}{2} + 2xtg(\alpha_0)\right)m = \left(\frac{\pi}{2} - 2xtg(\alpha_0)\right)m \ . \qquad (11.26)$$

Diametrul de bază nu depinde de coeficientul de deplasare.

$$d_b = d\cos(\alpha_0) = mz\cos(\alpha_0) \qquad (11.27)$$

11.4 Parametrii geometrici ai angrenajului format din două roți cu dantura generală în evolventă.

O problemă care apare în practica inginerească este aceea de a determina distanța dintre centrele a două roți dințate cu dantura în evolventă atunci când se pun în contact dinții acestora. Problema poate fi pusă şi invers. Impunându-se distanța dintre axe şi raportul de transmitere se cere determinarea parametrilor celor două roți astfel ca angrenarea să fie posibilă şi să se facă joc între flancuri.

Un angrenaj este caracterizat de:

- unghiul de angrenare α_w;
- diametrele de rostogolire $d_{w1,2}$ care se determină cu relația:

$$d_{w1,2} = \frac{d_{b1,2}}{\cos(\alpha_w)} = \frac{mz_{1,2}}{\cos(\alpha_w)} \qquad (11.28)$$

- distanța dintre axe a_w.

$$a_w = \frac{d_{w1} + d_{w2}}{2} = m\frac{z_1 + z_2}{2}\frac{\cos(\alpha_0)}{\cos(\alpha_w)}. \qquad (11.29)$$

Pentru a putea face operabile relațiile 11.28 şi 11.29 trebuie determinată expresia unghiului de angrenare α_w. Se consideră un cerc (c_y) de diametrul d_y şi se determină grosimea dintelui s_y şi lățimea golului dintre doi dinți e_y pe baza Figurii 11.9.

Cercul (c_y) caracterizat de unghiul de presiune a profilului pe acest cerc α_y. Diametrul cercului se determină cu relația 11.6:

$$d_y = \frac{d_b}{\cos(\alpha_y)} = \frac{mz\cos(\alpha_0)}{\cos(\alpha_0)}. \qquad (11.30)$$

Pasul pe cercul (C_y)

$$p_y = \frac{\pi d_y}{z} = \pi m \frac{\cos(\alpha_0)}{\cos(\alpha_y)}. \qquad (11.31)$$

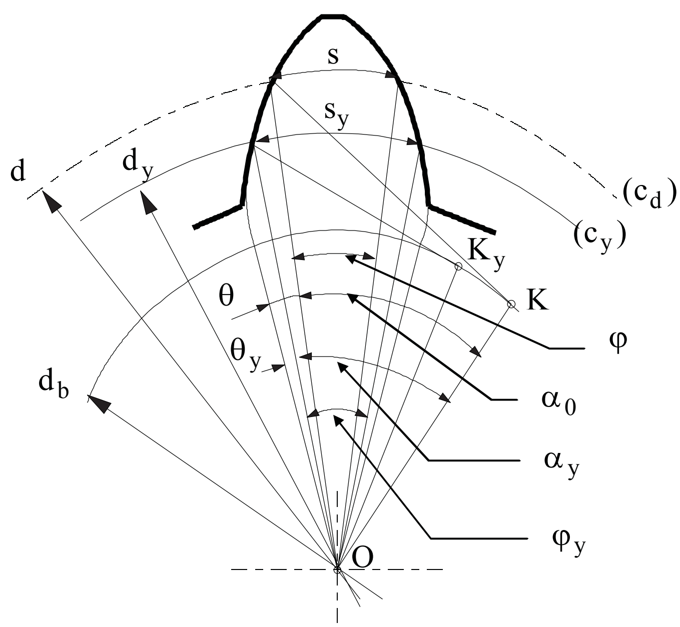


Figura 11.9

Din figura 11.9 :

$$s_y = \frac{\varphi_y d_y}{2} \qquad (11.32)$$

unde :

$$\varphi_y = \varphi + 2(\theta - \theta_y) = 2\frac{s}{d} + 2[\mathrm{inv}(\alpha_0 - \alpha_y)] \tag{11.33}$$

Se obține pentru s_y expresia:

$$s_y = mz\frac{\cos(\alpha_0)}{\cos(\alpha_y)}\left[\frac{\pi}{2z} + \frac{2x\,\mathrm{tg}(\alpha_0)}{z} + \mathrm{inv}(\alpha_0) - \mathrm{inv}(\alpha_y)\right]. \tag{11.34}$$

Grosimea golului dintre doi dinți pe cercul (c_y) se determină cu relația:

$$e_y = p_{y-}s_y = \pi mz\frac{\cos(\alpha_0)}{\cos(\alpha_y)} - s_y =$$

$$= mz\frac{\cos(\alpha_0)}{\cos(\alpha_y)}\left[\frac{\pi}{2z} - \frac{2x\,\mathrm{tg}(\alpha_0)}{z} - \mathrm{inv}(\alpha_0) + \mathrm{inv}(\alpha_y)\right]. \tag{11.35}$$

Unghiul de angrenare α_w *(același pentru ambele roți) se determină din condiția ca pe cercurile de rostogolire, grosimea dintelui unei roți să fie egală cu lățimea golului dintre dinți, ai roții conjugate.*

$$s_{w1} = e_{w2.} \tag{11.36}$$

Înlocuind în relația 11.36 expresiile 11.34 și11.35 în care $\alpha_y = \alpha_w$ și după efectuarea calculelor se obține *ecuația fundamentală a angrenajului:*

$$\mathrm{inv}(\alpha_w) = \mathrm{inv}(\alpha_0) + 2\frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2}\mathrm{tg}(\alpha_0). \tag{11.37}$$

Din ecuația 11.37 și ecuația 11.29 rezultă că distanța dintre axele unui angrenaj este egală cu semisuma diametrelor de divizare.

$$a_0 = m\frac{z_1 + z_2}{2} \tag{11.38}$$

numai când:

$$x_1 + x_2 = 0 \tag{11.39}$$

Mărimea a_0 poartă denumirea de *distanță de referință între axe*. Angrenajele care respectă condiția 11.38 se numesc *angrenaje* ***zero deplasate*** când $x_1 = -x_2 \neq 0$ şi ***nedeplasate*** când $x_1=x_2=0$.

Revenind la problema inițială când se impune distanța dintre axe şi raportul de transmitere problema se rezolvă considerând într-o primă aproximație roțile nedeplasate ($a_w = a_0$) şi se scrie sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{mz_1 + mz_2}{2} = a_0 \\ \dfrac{z_2}{z_1} = i_{12} \end{cases} \tag{11.40}$$

Modulul se adoptă din condiția ca roțile să poată suporta solicitările ce apar pentru a transmite momentul dorit. Rezolvarea sistemului 11.39 va conduce, pentru numerele de dinți, la soluții care puțin probabil că vor fi numere întregi. Se adoptă ,pentru mecanismul real, numerele de dinți egale cu valorile întregi cele mai apropiate de soluția sistemului 11.39. Acest fapt duce la modificarea distanței dintre axe. Pentru a aduce distanța dintre axe la valoarea prescrisă se utilizează relația 11.29 în care z_1 şi z_2 sunt numerele de dinți întregi adoptate. Din această ecuație se obține valoarea unghiului α_w. Cunoaşterea valorii acestui unghi introdusă în ecuația 11.37 determină suma coeficienților deplasărilor de profil. Cum se repartizează această cantitate pe fiecare roată este o problemă ce depăşeşte cadrul acestui curs.

Raportul de transmitere al unui angrenaj în evidentă se determină din condiția de rostogolire pură a celor două corpuri de rostogolire. Punctul de contact C dintre aceste două cercuri are aceeaşi viteză pe fiecare din cele două cercuri, (Fig.11.10). *Condiția de rostogolire pură* dintre cele două cercuri de rostogolire se poate scrie.

$$\overline{v}_{C1} = \overline{v}_{C2} \tag{11.41}$$

Relația dintre modulele celor doi vectori permite determinarea raportului de transmitere al angrenajului:

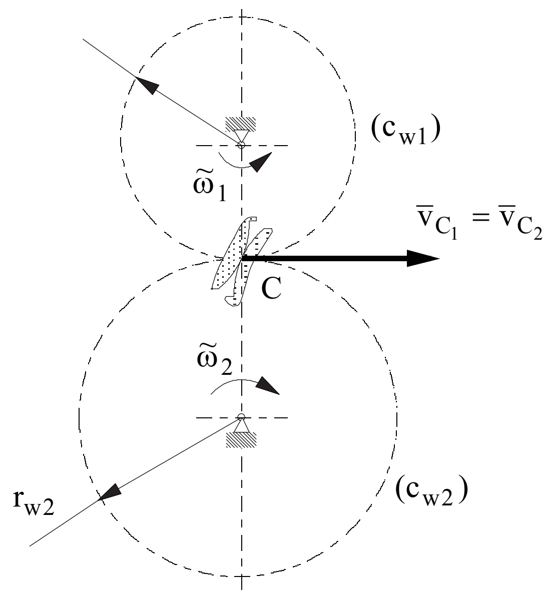


Figura 11.10

$$v_{C1} = v_{C2} \Rightarrow \omega_1 r_{w1} = \omega_2 r_{w2} \tag{11.41}$$

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{w2}}{r_{w2}} = \frac{\dfrac{mz_2}{2}\dfrac{\cos(\alpha_0)}{\cos(\alpha_w)}}{\dfrac{mz_2}{2}\dfrac{\cos(\alpha_0)}{\cos(\alpha_w)}} = \frac{z_2}{z_1} \tag{11.42}$$

Relația 11.42 arată că raportul de transmitere al unui angrenaj evolventic este egal cu numărul de dinți ai roții conduse raportat la numărul de dinți ai roții conducătoare.

În practică pentru un mecanism complex cu roți dințate cu axe fixe se studiul cinematic presupune determinarea raportului total de transmitere. Ca regulă generală *raportul total de transmitere al unui mecanism complex cu axe fixe* i_{1n} *este egal cu produsul rapoartelor de transmitere ale angrenajelor componente.*

$$i_{1n} = i_{12}\, i_{23} \cdot \ldots\ldots \cdot i_{n-1,n} \,. \qquad (11.42)$$

XII Dinamica punctului material._

12.1 Problemele fundamentale ale dinamicii punctului material liber.

Dinamica se ocupă cu studiul mişcării corpurilor luând în considerare cauzele care produc mişcarea adică forța (forțele). La baza dinamicii stă principiul al II-lea al dinamicii enunțat de către Isaac Newton:

$$\overline{F} = m\overline{a}. \qquad (12.1)$$

Expresia matematică 12.1 a acestui principiu face legătura dintre o mărime dinamică, forța, o mărime cinematică, accelerația şi o mărime ce caracterizează capacitatea corpului de a se opune schimbări stării de mişcare, masa. Evident ca şi aici vor fi utilizate şi celelalte două principii care însă au fost utilizate şi în statică (principiul inerției şi principiul acțiunii şi reacțiunii).

Problemele dinamicii sunt două:

a) prima problemă cere ca să se determine mişcarea corpului atunci când se cunosc forțele care acționează asupra lui.

b) a doua problemă presupune determinarea forțelor atunci când se cunoaşte mişcarea corpului.

Ecuația 12.1 poate fi privită ca o ecuație vectorială diferențială de ordinul doi deoarece poate fi scrisă sub forma:

$$m\frac{d^2\overline{r}}{dt^2} = \overline{F} \qquad (12.2)$$

Din forma 12.2 a ecuației diferențiale rezultă că forța $\overline{F}$ (termenul liber al ecuației diferențiale) depinde în cazul cel mai general de variabila independentă t, şi de primele n-1 derivate ale funcţiei căutate F(t). Adică:

$$\overline{F} = \overline{F}(\dot{\overline{r}}, \overline{r}, t). \tag{12.3}$$

Forţele ce acţionează pot depinde numai de una din aceste variabile. Astfel:

Forţa elastică depinde numai de deplasare.

$$\overline{F} = -k\overline{r}; \text{ k este constanta elastică.} \tag{12.4}$$

Forţa de acceleraţie gravitaţională.

$$\overline{F} = -f\frac{mM}{r^2}\frac{\overline{R}}{r} = -f\frac{mM}{r^3}\overline{r}; \tag{12.5}$$

unde, feste constanta atracţiei gravitaţionale, m, M-masele celor două corpuri.

Forţa de frecare într-un lichid depinde de viteză:

$$\overline{F} = -c\overline{v}. \tag{12.6}$$

Forţa de frecare uscată (coulumbiană) depinde şi ea de viteză doar într-un mod mai puţin vizibil. Deşi modulul ei este independent de viteză, sensul ei trebuie să fie opus vitezei.

$$\overline{T} = -\mu|\overline{N}|\frac{\overline{v}}{v}. \tag{12.7}$$

Ca exemplu de forţă ce depinde de timp se poate aminti forţa de propulsie ce acţionează asupra unei rachete.

Proiecțiile pe axele unui sistem cartezian a ecuației vectoriale 12.3 vor conduce la un sistem de trei ecuații diferențiale de ordinul doi cu trei necunoscute.

$$\begin{cases} m\ddot{x} = X(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t); \\ m\ddot{x} = Y(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t); \\ m\ddot{z} = Z(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t). \end{cases} \tag{12.8}$$

Integrarea fiecărei ecuații va conduce la două constante arbitrare astfel că soluția sistemului va depinde șase constante scalare. Aceste constante se determină din condiția ca pentru momentul inițial t=0 poziția și viteza punctului să ia valori bine precizate $\overline{r_0}$ și $\overline{v_0}$.

$$\begin{cases} \bar{r}_0 = x_0\bar{i} + y_0\bar{j} + z_0\bar{k}; \\ \bar{v}_0 = v_{0x}\bar{i} + v_{0y}\bar{j} + v_{0z}\bar{k}. \end{cases} \tag{12.9}$$

Soluția sistemului 12.8 se scrie:

$$\begin{cases} x = f_1(t,x_0,y_0,z_0,\dot{x}_0,\dot{y}_{0,}\dot{z}_0); \\ y = f_2(t,x_0,y_0,z_0,\dot{x}_0,\dot{y}_{0,}\dot{z}_0); \\ z = f_3(t,x_0,y_0,z_0,\dot{x}_0,\dot{y}_{0,}\dot{z}_0). \end{cases} \tag{12.10}$$

Relațiile 12.10. pot fi privite ca ecuațiile parametrice ale unei curbe care nu este altceva decât traiectoria punctului material. Ca aplicație se consideră mișcarea unui punct sub acțiunea greutății proprii. Forța $\overline{F}$ are componentele:

$$X = 0,\ Y = -mg,\ Z = 0. \tag{12.11}$$

g-accelerația gravitațională. Integrând de două ori ecuația fundamentală se obține:

$$\begin{cases} \dot{x} = C_1; \quad \dot{y} = -gt + C_2; \; \dot{z} = C_3; \\ x = C_1 t + C_4; \; y = -g\dfrac{t^2}{2} + C_2 t + C_5; \; z = C_3 t + C_6. \end{cases} \tag{12.12}$$

Se presupune că inițial corpul se afla în origine şi aruncarea s-a făcut în planul Oxy după o direcție ce face unghiul α cu orizontala. Condițiile inițiale sunt:

$$\begin{cases} x(0) = 0; \; y(0) = 0; \; z(0) = 0; \\ v_{0x}(0) = v_0 \cos(\alpha); \; v_{0y} = v_0 \sin(\alpha); \; v_{0z} = 0. \end{cases} \tag{12.13}$$

Înlocuirea condițiilor 12.13.în ecuația 12.12.conduce la următoarele expresii pentru constantele de integrare:

$$\begin{cases} C_1 = v_0 \cos(\alpha); \; C_2 = v_0 \sin(\alpha); \\ C_3 = C_4 = C_5 = C_6 = 0. \end{cases} \tag{12.14}$$

Ecuațiile parametrice ale traiectoriei sunt:

$$\begin{cases} x = (v_0 \cos(\alpha))\, t; \\ y = (v_0 \sin(\alpha)) t; \\ z = 0. \end{cases} \tag{12.15}$$

Ecuația z=0 arată că *traiectoria este o curbă plană* cuprinsă în planul vertical $z = 0$. Eliminarea timpului din primele două ecuații 12.15 conduce la ecuația explicită a traiectoriei.

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos(\alpha)^2} x^2 + x\,\mathrm{tg}(\alpha), \tag{12.16}$$

care este ecuaţia unei *parabole*. Corpul va fi în mişcare până la atingerea din nou a solului (x=0). Ecuaţia :

$$y = 0 \tag{12.17}$$

are două soluţii ,una banală, ce corespunde abscisei x=0 şi cealaltă:

$$x = \frac{v_0^2 \sin(\alpha)^2}{2g}. \tag{12.18}$$

Înălţimea maximă la care ajunge corpul se obţine pentru acel x_A care anulează derivata lui y.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g}{2 v_0^2 \cos(\alpha)^2} 2x_A + tg(\alpha) = 0 \Rightarrow x_A = \frac{v_0^2 \sin(\alpha)^2}{2g}. \tag{12.19}$$

Pentru această abscisă înălţimea y ia valoarea maximă.

$$y_{max} = y(x_A) = \frac{v_0^2 \sin(\alpha)^2}{2g}. \tag{12.20}$$

Un ultim aspect este cel al locului geometric care desparte domeniile în care un obiectiv poate fi lovit, de cel al punctului în care nu poate fi lovit atunci când proiectilul este lansat sub diferite unghiuri dar cu aceiaşi viteză. Curba respectivă este înfăşurarea tuturor traiectoriilor. După cum se cunoaşte din geometria diferenţială înfăşurătoarea unei familii de curbe plane ce depind de un parametru se obţine prin eliminarea parametrului între ecuaţia curbei şi derivata acesteia în raport cu parametrul.

$$\begin{cases} y(x,\alpha) = 0, \\ \dfrac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha} = 0. \end{cases} \tag{12.21}$$

Aplicând acestea pentru parabola 12.16, parametrul fiind unghiul α, se obţine ca înfăşurătoare ecuaţia:

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - g\frac{x^2}{2v_0^2} \tag{12.22}$$

care este ecuaţia unei parabole numite ``*parabola de siguranţă*``, (Fig.12.1)

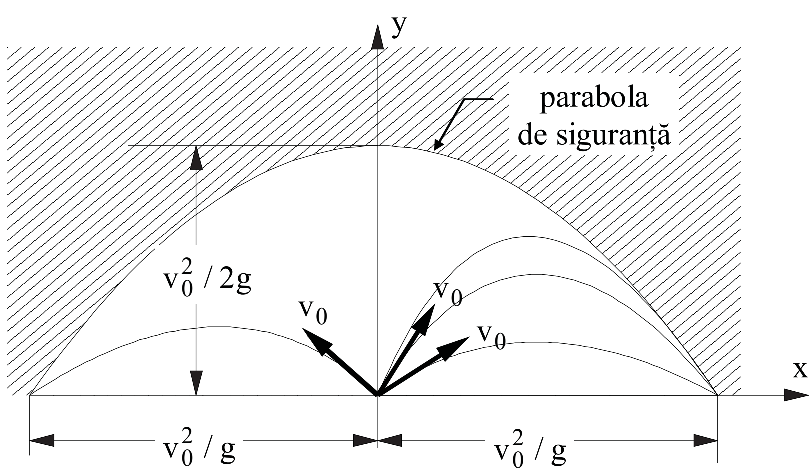


Figura 12.1

12.2. Mărimi dinamice. Teoremele generale ale dinamicii punctului material.

Impulsul mecanic este prin definiţie produsul dintre masa şi viteza punctului material.

$$\overline{H} = m\overline{v} \tag{12.23}$$

Proiecţiile impulsului pe axe.

$$H_x = mv_x; \quad H_y = mv_y; \quad H_z = mv_z. \qquad (12.24)$$

Momentul cinetic $\overline{K}$ este o mărime dinamică ce generalizează impulsul şi este egal cu momentul impulsului şi raportat cu un punct

$$\overline{K}_0 = \bar{r} \times \overline{H} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix}; \qquad (12.25)$$

cu proiecţiile pe axe:

$$K_x = m(zv_y - yv_z); \quad K_y = m(zv_x - xv_z); \quad K_z = m(xv_y - yv_x). \qquad (12.26)$$

Lucrul mecanic L este măsura transferului de energie între două stări ale unui sistem material. Expresia acestuia este prin definiţie:

$$L = \int_\Gamma \overline{F} d\bar{r} = \int_\Gamma X dx + Y dy + Z dz. \qquad (12.27)$$

□ fiind curba în lungul căreia se evaluează integrala.

Energia cinetică E_c este o mărime scalară care caracterizează capacitatea unui sistem mecanic de a înmagazina sau de a da lucru mecanic. Prin definiţie:

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2. \qquad (12.28)$$

Teorema impulsului afirmă că *derivata în raport cu timpul a impulsului punctului material este egală, în orice moment, cu* *rezultanta tuturor forțelor care acționează asupra punctului*. Demonstrația este imediată:

$$\frac{d\overline{H}}{dt} = \frac{d(m\overline{v})}{dt} = m\frac{d\overline{v}}{dt} = m\overline{a} \tag{12.29}$$

Exprimarea matematică a teoremei impulsului:

$$\dot{\overline{H}} = \overline{F} \tag{12.30}$$

sau prin proiecții:

$$H_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx};\quad H_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky};\quad H_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}; \tag{12.31}$$

Teorema momentului cinetic afirmă că *derivata în raport cu timpul a momentului cinetic a unui punct material în raport cu un punct fix O este egală cu momentul rezultant al forțelor exterioare ce acționează asupra punctului respectiv*. Pentru a o demonstra se derivează în raport cu timpul relația 12.25.

$$\frac{d}{dt}\overline{K}_0 = \frac{d}{dt}(\overline{r} \times m\overline{v}) = \frac{d\overline{r}}{dt} \times m\overline{v} + \overline{r} \times m\frac{d\overline{v}}{dt} = \overline{v} \times m\overline{v} + \overline{r} \times m\overline{a}$$

$\overline{v} \times m\overline{v} = 0$ deoarece vectorii sunt coliniari

$$m\overline{a} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k.$$

$$\frac{d\overline{K}_0}{dt} = \overline{r} \times \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k = \sum_{k=1}^{n} \overline{r} \times \overline{F}_k = \sum_{k=1}^{n} \overline{M}_k = \overline{M}_0$$

rezultă:

$$\dot{\overline{K}}_0 = \overline{M}_0 \qquad (12.3$$

2)

sau prin proiecții:

$$\dot{K}_x = \sum_{k=1}^{n} M_{kx}; \quad \dot{K}_y = \sum_{k=1}^{n} M_{ky}; \quad \dot{K}_z = \sum_{k=1}^{n} M_{kz};$$

Teorema energiei cinetice afirmă că *variația energiei cinetice în raport cu intervalul de timp dt este egală cu lucrul mecanic efectuat în același timp de către forța rezultantă ce acționează asupra punctului*. Demonstrația este imediată:

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\bar{v}^2\right) = m\bar{v}\dot{\bar{v}} = m\dot{\bar{v}}\bar{v} = m\bar{a}\,\bar{v} = \bar{F}\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{\bar{F}\,d\bar{r}}{dt} = \frac{dL}{dt}$$

Prin înmulțirea cu dt rezultă teorema energiei cinetice sub formă diferențială:

$$dE_c = dL \qquad (12.33)$$

Integrarea a în raport cu timpul a ecuației 12.33 conduce la teorema energiei cinetice sub formă finită:

$$E_c - E_{c0} = L. \qquad (12.33')$$

12.3 Teoreme de conservare în dinamica punctului material

Teorema de conservare a impulsului afirmă că *în absența forței* $\bar{F}$ *impulsul mecanic se conservă*. Demonstrația este evidentă. În ecuația 12.30 anularea forței rezultante:

$$\dot{\bar{H}} = 0 \Rightarrow \bar{H} = \bar{C} \qquad (12.3$$

4)

Mult mai puţin restrictivă teorema este adevărată *dacă proiecţia forţei rezultante pe o axă este nulă atunci proiecţia impulsului după acea axă* ,fie acesta Ox, *se conservă*. Rezultă imediat din prima relaţie 12.24.

$$H_x = C \tag{12.35}$$

Teorema conservării momentului cinetic afirmă că *atunci când momentul în raport cu originea O a rezultantei* $\overline{F}$ *a forţelor ce acţionează asupra punctului material este nul, momentul cinetic în raport cu O se conservă*. Considerând ecuaţia 12.32

$$\dot{\overline{K}}_0 = 0 \Rightarrow \overline{K}_0 = \overline{C}' \tag{12.36}$$

Teorema are loc în condiţii mai puţin restrictive *atunci când momentul rezultant al forţelor exterioare în raport cu o axă* (fie O_z) *este nul*. În această situaţie proiecţia momentului cinetic în raport cu acea axă se conservă.

$$\frac{dK_z}{dt} = 0 \Rightarrow K_z = \text{const.} \tag{12.36}$$

Teorema energiei cinetice şi a lucrului mecanic *conduce la o integrală primă atunci când expresia lucrului mecanic este o diferenţială exactă*. Adică există o funcţie U numită *funcţie de potenţial* astfel ca:

$$dL = \overline{F}d\overline{r} = Xdx + Ydy + Zdz = dU \tag{12.37}$$

Forța $\overline{F}$ se numeşte în acest caz *forță conservativă*. În analiza matematică s-a arătat că acest lucru se întâmplă dacă:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}; \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}; \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}.$$

Dacă este satisfăcută condiția de mai sus teorema energiei cinetice 12.33 se scrie:

$$dE - dU = 0 \tag{12.38}$$

sau după integrare

$$E - U = C \tag{12.39}$$

În locul funcției U se utilizează adesea funcția V dată de relația

$$V = -U \tag{12.40}$$

care se numeşte *energie potențială*. Se obține:

$$E + V = C \tag{12.41}$$

Suma E+V se numeşte *energie mecanică*. Se poate afirma că în cazul în care rezultanta forțelor ce acționează asupra punctului material derivă intr-o funcție de forțe energia mecanică se conservă. Ca exemplu de forțe ce derivă dintr-un potențial se pot prezenta: *forța gravitațională, forța elastică.*

Aceste teoreme sunt consecințe ale ecuației fundamentale a dinamicii (12.1). Ele permit în multe situații o rezolvare mai

comodă a problemelor de dinamică şi anume când conduc la integrale prime adică la relații sau expresii diferențiale de ordinul I se anulează astfel că mărimea în cauză se conservă. În cazul în care punctul material este supus la legături, după aplicarea legăturilor şi introducerea reacțiunilor problema se reduce la problema dinamicii punctului material liber. Necunoscutele problemei în acest caz sunt mişcarea şi reacțiunea.
Mişcarea presupune determinarea a unul sau doi parametri după cum punctul material se mişcă pe o curbă sau respectiv pe o suprafață. Pentru punctul material teorema impulsului este practic echivalentă cu ecuația fundamentală a dinamicii.

Aplicarea teoremelor mai sus menționate sunt utile pentru eliminarea reacțiunii. Astfel teorema energiei cinetice este utilă atunci când legăturile sunt ideale iar reacțiunea are numai componenta $\overline{N}$ normala la suprafață sau la curbă şi lucrul mecanic al acesteia $\overline{N} \cdot d\overline{r}$ este nul.
Pentru determinarea reacțiunii se va aplica ecuația fundamentală a dinamicii proiectată după o direcție normală la curbă sau suprafață.

12.4. Dinamica mişcării relative a punctului material. Repausul relativ

În cazul în care mişcarea punctului material se raportează la un sistem de referință mobil ecuația de fundamentală 12.1 a dinamicii trebuie corectată. Pentru aceasta ecuația de compunere a accelerațiilor în mişcarea relativă a punctului material 7.17 va fi:

$$\overline{a} = \overline{a}_t + \overline{a}_c + \overline{a}_r$$

unde

$\overline{a}_t = \overline{a}_0 + \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{r}) + \overline{\varepsilon} \times \overline{r}$ este accelerația de transport;

$\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r$ este accelerația Coriolis;

se va scrie sub forma:

$$\bar{a}_r = \bar{a} - \bar{a}_c - \bar{a}_r, \qquad (12.42)$$

şi se înmulțeşte cu masa m:

$$m\bar{a}_r = m\bar{a} - m\bar{a}_t - m\bar{a}_c\,. \qquad (12.43)$$

Cu notațiile:

$\bar{F}_t = -m\bar{a}_t$; (forța complementară de transport),

$\bar{F}_c = -m\bar{a}_c$; (forța complementară Coriolis)

ecuația 12.43 devine

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{F}_r + \bar{F}_c \qquad (12.44)$$

Teoremele fundamentale ale dinamicii punctului material iau în mişcarea relativă următoarele forme:

Teorema impulsului

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = \bar{F} + \bar{F}_r + \bar{F}_c \qquad (12.45)$$

Teorema momentului cinetic

$$\frac{\partial \bar{K}_r}{\partial t} = \bar{r} \times (\bar{F} + \bar{F}_t + \bar{F}_c). \qquad (12.46)$$

Teorema energiei cinetice

$$\frac{\partial E_r}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}m\bar{v}_r^2\right) = m\bar{v}_r\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial t} = m\bar{v}_r\,\bar{a}_r = \bar{v}_r(m\bar{a}_r) = \bar{v}_r(\bar{F} + \bar{F}_t + \bar{F}_r) \tag{12.46}$$

sau

$$\partial E_r = (\bar{F}_r + \bar{F}_t)\partial\bar{r} \tag{12.47}$$

deoarece:

$$\bar{v}_r \times \bar{F}_c = \bar{v}_r \times (2m\bar{\omega}_t \times \bar{v}_r) = 0$$

S-a notat cu $\partial/\partial t$ operatorul de diferențiere locală şi s-au indexat cu ``r`` mărimile relative. Dacă se impune condiția ca într-un sistem de referință mobil ecuația fundamentală să îşi păstreze forma 12.1 adică:

$$m\bar{a}_r = \bar{F} \tag{12.48}$$

se ajunge la concluzia că este necesar şi suficient ca:

$$\bar{F}_c + \bar{F}_t = 0\,, \tag{12.49}$$

adică

$$-m\bar{a}_t - m\bar{a}_c = 0 \tag{12.50}$$

sau

$$\bar{a}_0 + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r = 0 \tag{12.51}$$

Concluzia 12.51 trebuie să fie îndeplinită de orice punct în care s-ar afla mobilul. Scrisă pentru două mobile ce se lansează în acelaşi timp din acelaşi punct dar cu viteze relative diferite:

$$\bar{a}_0 + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + 2\bar{\omega} \times \bar{v}'_r = 0$$

$$\bar{a}_0 + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + 2\bar{\omega} \times \bar{v}''_r = 0 \tag{12.52}$$

scăzând cele două relații:

$$2\bar{\omega} \times (\bar{v}'_r - \bar{v}''_r) = 0 \tag{12.53}$$

Relația 12.51 trebuie îndeplinită pentru orice viteze $\bar{v}'_r$ şi $\bar{v}''_r$. Aceasta se întâmplă numai dacă:

$$\bar{\omega} \equiv 0 . \tag{12.54}$$

Din relația 12.54 rezultă imediat:

$$\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} \equiv 0 . \tag{12.55}$$

Relația 12.54 şi 12.55 arată că mişcarea reperului mobil trebuie să fie o translație. Revenirea cu aceste relații în ecuația 12.51 conduce în continuare la:

$$\bar{a}_0 = 0. \tag{12.56}$$

Conform relaților 12.56şi 12.54 *reperul mobil trebuie să fie în repaus fie în mişcare rectilinie uniformă* $\overline{v_0} =$ ct.

XIII Momente de inerție.

13.1 Momente de inerție. Definiție. Relații de calcul

În ecuația fundamentală a dinamicii 12.1 măsura inerției punctului material era caracterizată de masa acestuia. În cazul sistemelor de puncte materiale sau a rigidelor pe lângă valoarea maselor inerția depinde şi de distribuția masei. În mişcările de rotație inerția este mai mare când masa este distribuită cât mai departe de punctul sau axa de rotație. Distribuția este caracterizată de produse de forma:

$$J = \sum_{k=1}^{N} m_k x_k^n y_k^p z_k^q; \ n \geq 0; \quad p \geq 0; \quad q \geq 0. \tag{13.1}$$

unde m_k este masa punctului material situat în punctul $A_k(x_k, z_k, y_k)$. Aceste mărimi se numesc *momente de inerție*. În funcție de valorile exponenților n,p,q se disting:

Momente masice de ordin zero (n+p+q=0)

$$\sum_{k=1}^{N} m_k = m \tag{13.2}$$

reprezintă *masa totală* a sistemului.

Momente statice de ordinul unu (n+p+q=1) de forma:

$$\sum_{k=1}^{N} m_k x_k; \quad \sum_{k=1}^{N} m_k y_k; \quad \sum_{k=1}^{N} m_k z_k. \tag{13.3}$$

Cu ajutorul momentelor statice de ordinul unu şi zero şi făcând apel şi la relațiile 2.30 se poate defini *centrul de masă* al sistemului ca fiind punctul de coordonate (□,□,□) ale cărui coordonate satisfac relațiile:

$$\xi = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k x_k}{m}; \quad \eta = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k y_k}{m}; \quad \zeta = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k z_k}{m}. \tag{13.4}$$

Momentele masice de ordinul doi (n+p+q=2)

$$\sum_{k=1}^{N} m_k (x_k^2 + y_k^2); \quad \sum_{k=1}^{N} m_k (y_k^2 + z_k^2); \quad \sum_{k=1}^{N} m_k (z_k^2 + x_k^2); \tag{13.5}$$

$$\sum_{k=1}^{N} m_k x_k y_k; \quad \sum_{k=1}^{N} m_k y_k z_k; \quad \sum_{k=1}^{N} m_k z_k x_k; \tag{13.6}$$

$$\sum_{k=1}^{N} m_k x_k^2; \quad \sum_{k=1}^{N} m_k y_k^2; \quad \sum_{k=1}^{N} m_k z_k^2; \tag{13.7}$$

$$\sum_{k=1}^{N} m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2); \tag{13.8}$$

Relațiile 13.5 definesc *momente de inerție în raport cu axele* de coordonate şi se notează:

$$J_x = \sum_{k=1}^{N} m_k (y_k^2 + z_k^2); \quad J_y = \sum_{k=1}^{N} m_k (z_k^2 + x_k^2); \quad J_z = \sum_{k=1}^{N} m_k (x_k^2 + y_k^2). \tag{13.9}$$

Relațiile 13.6 definesc *momentele de inerție centrifugale* cu notațiile:

$$J_{xy} = \sum_{k=1}^{N} m_k x_k y_k; \quad J_{yz} = \sum_{k=1}^{N} m_k y_k z_k; \quad J_{zx} = \sum_{k=1}^{N} m_k z_k x_k; \tag{13.10}$$

Cu relațiile 13.7 se definesc *momentele de inerție planare*:

$$J_{Oxy} = \sum_{k=1}^{N} m_k z_k^2; \quad J_{Oyz} = \sum_{k=1}^{N} m_k y_k^2; \quad J_{Ozx} = \sum_{k=1}^{N} m_k x_k^2. \tag{13.11}$$

Cu relația 13.8 se defineşte *momentul de inerție polar*:

$$J_O = \sum_{k=1}^{N} m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2). \tag{13.12}$$

Între momentele de inerție planare şi cel axial există relația evidentă:

$$J_O = J_{Oxy} + J_{Oyz} + J_{Ozx}. \tag{13.13}$$

Momentul de inerție polar se poate exprima şi cu ajutorul momentelor axiale. Se porneşte de la egalitatea:

$$x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 = \frac{1}{2}\left(y_k^2 + z_k^2\right) + \frac{1}{2}\left(x_k^2 + z_k^2\right) + \frac{1}{2}\left(x_k^2 + y_k^2\right)$$

Înmulțind cu masa m_k şi sumând pentru toate punctele sistemului se obține:

$$J_O = \frac{1}{2}(J_x + J_y + J_z) \tag{13.14}$$

În cazul sistemelor cu distribuție uniformă a masei relațiile rămân valabile cu deosebirea că sumele se transform în integrale.

În practică se utilizează pentru exprimare caracteristicilor inerțiale momentele de inerție $J_x, J_y, J_z, J_{xy}, J_{yz}, J_{zx}$. Toate acestea pot fi considerate ca elementele unui matrice simetrice **J** numită *matricea de inerție* sau *tensorul de inerție*.

$$\mathbf{J}=\begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix}; \quad J_{xy}=J_{yx}; \quad J_{yz}=J_{zy}; \quad J_{xz}=J_{zx}. \tag{13.15}$$

13.2 Variația momentelor de inerție la translația axelor.

Se consideră un sistem de puncte materiale a căror poziție se raportează la un sistem de coordonate $Ox'y'z'$ şi un al doilea sistem de coordonate Cxyz cu axele paralele cu ale primului şi cu originea în centrul de masă C al sistemului, (Fig.13.1).

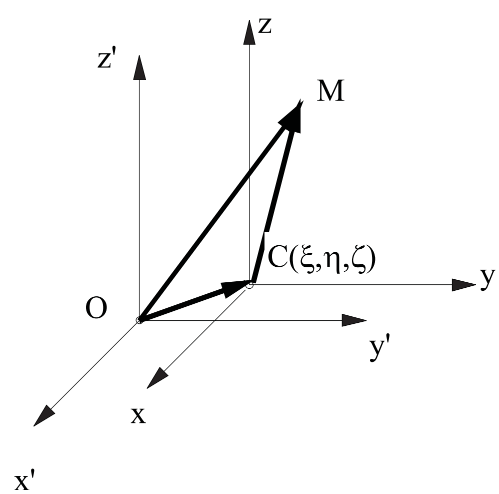


Figura 13.1

Relațiile de legătură dintre coordonatele unui punct oarecare în cele două sisteme sunt:

$$x' = x+\xi, \quad y' = y+\eta, \quad z' = z+\zeta. \tag{13.16}$$

Momentul $J_{x'}$ se calculează cu relația 13.9

$$J_{x'} = \sum_{k=1}^{N} m_k (y'^2_k + z'^2_k) = \sum_{k=1}^{N} m_k\left[(y_k+\eta)^2+(z_k+\zeta)^2\right] = \sum_{k=1}^{N} m_k (y_k^2 + 2y_k\eta + \eta^2 + z_k^2 + 2\zeta z_k + \zeta^2)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} m_k (y_k^2+z_k^2) + \sum_{k=1}^{N} m_k(\eta^2+\zeta^2) + 2\eta\sum_{k=1}^{N} m_k y_k + +2\zeta\sum_{k=1}^{N} m_k y_k = J_x + m(\eta^2+\zeta^2).$$

Ultimele două sume se anulează deoarece reprezintă momentele statice față de un sistem de coordonate ce trece prin centrul de masă al sistemului iar suma $\eta^2+\zeta^2$ reprezintă pătratul distanței dintre axele Ox' și Cx. Similar se obțin alte două relații.

$$\begin{cases} J_{x'} = J_x + (\eta^2+\zeta^2), \\ J_{y'} = J_y + (\zeta^2+\xi^2) \\ J_{z'} = J_x + (\xi^2+\eta^2) \end{cases} \tag{13.17}$$

Relația 13.14 exprimă ***teorema lui Steiner*** pentru momente axiale: *momentul de inerție al unui sistem de puncte materiale față de o axă este egal cu momentul de inerție față de o axă ce trece prin centrul de masă al sistemului paralelă cu axa dată la care se adaugă produsul dintre masa sistemului și pătratul distanței dintre cele două axe .*

Pentru momente centrifugale scriind relația 13.10.

$$J_{x'y'} = \sum_{k=1}^{N} m_k x'_k\, y'_k = \sum_{k=1}^{N} m_k (x_k+\xi)(y'_k+\eta) = \sum_{k=1}^{N} m_k x_k y_k + \xi\sum_{k=1}^{N} m_k y_k + \eta\sum_{k=1}^{N} m_k x_k + \\ + \sum_{k=1}^{N} m_k x'_k\, y'_k = J_{xy} + m\xi\eta.$$

Se obțin încă două relații similare și în final:

$$\begin{cases} J_{x'y'} = J_{xy} + m\xi\eta; \\ J_{y'z''} = J_{yz} + m\eta\zeta; \\ J_{z'x'} = J_{xz} + m\xi\zeta. \end{cases} \tag{13.18}$$

Relațiile 13.18. exprimă *variația momentelor centrifugale la translația axelor*.

13.3 Variația momentelor de inerție la rotația axelor

Pentru simplitate se va considera cazul plan $z_k = 0$. Relațiile de calcul pentru momentele axiale devin:

$$J_x = \sum_{k=1}^{N} m_k y_k^2, \quad J_y = \sum_{k=1}^{N} m_k y_k^2. \tag{13.19}$$

Iar pentru momentul centrifugal:

$$J_{xy} = \sum_{k=1}^{N} m_k x_k y_k. \tag{13.20}$$

Se consideră două sisteme de axe Oxy şi $Ox'y'$, (Fig.13.2). Relațiile de legătură dintre coordonatele punctului M în cele două sisteme este:

$$\begin{cases} x' = x\cos(\theta) + y\sin(\theta); \\ y' = -x\sin(\theta) + y\cos(\theta). \end{cases} \tag{13.21}$$

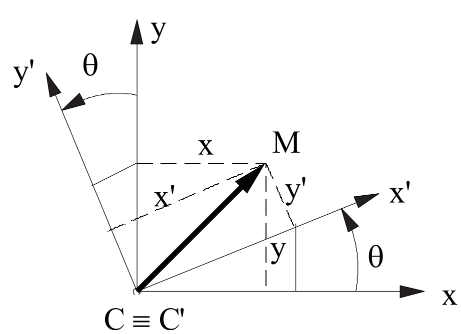


Figura 13.2

Momentele $J_{x'}$, $J_{y'}$ şi $J_{x'y'}$ sunt:

$$J_{x'} = \sum_{k=1}^{N} m_k y'^2_k = \sum_{k=1}^{N} m_k \left[-x_k \sin(\theta) + y_k \cos(\theta\right]^2 =$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{N} m_k y_k^2\right)\sin(\theta)^2 + \left(\sum_{k=1}^{N} m_k x_k^2\right)\cos(\theta)^2 - 2\left(\sum_{k=1}^{N} m_k x_k y_k\right)\sin(\theta)\cos(\theta) =$$
$$= J_x \cos(\theta)^2 + J_y \sin(\theta)^2 - 2J_{xy}\sin(\theta)\cos(\theta);$$

$$J_{y'} = \sum_{k=1}^{N} m_k x'^2_k = \sum_{k=1}^{N} m_k \left[x_k \cos(\theta) + y_k \sin(\theta\right]^2 =$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{N} m_k y_k^2\right)\sin(\theta)^2 + \left(\sum_{k=1}^{N} m_k x_k^2\right)\cos(\theta)^2 - 2\left(\sum_{k=1}^{N} m_k x_k y_k\right)\sin(\theta)\cos(\theta) =$$
$$= J_x \sin(\theta)^2 + J_y \cos(\theta)^2 + 2J_{xy}\sin(\theta)\cos(\theta);$$

$$Jx'y' = \sum_{k=1}^{N} m_k x'_k y'_k = \sum_{k=1}^{N} m_k \left[x_k \cos(\theta) + y_k \sin(\theta\right]\left[-x_k \sin(\theta) + y_k \cos(\theta\right] =$$
$$= (J_y - J_x)\sin(\theta)\cos(\theta) - J_{xy}\left[\cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2\right]$$

Astfel, la rotația axelor momentele de inerție variază după relațiile:

$$\begin{cases} J_{x'} = J_x \cos(\theta)^2 + J_y \sin(\theta)^2 - 2J_{xy}\sin(\theta)\cos(\theta), \\ J_{y'} = J_x \sin(\theta)^2 + J_y \cos(\theta)^2 + 2J_{xy}\sin(\theta)\cos(\theta), \\ J_{x'y'} = (J_y - J_x)\sin(\theta)\cos(\theta) - J_{xy}\left[\cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2\right]. \end{cases} \tag{13.22}$$

Aceiaşi metodologie se utilizează şi în cazul spațial pentru obținerea relațiilor care exprimă variația momentelor la rotația axelor.

13.4.Momente de inerție principale. Direcții de inerție principale

Expresiile 13.22 care exprimă variația momentelor de inerție la rotația axelor sugerează existența unui sistem de axe în raport cu care momentele de inerție axiale se iau valori extreme.
Relațiile 13.22 se pot scrie, dacă se ține cont de identitățile :

$$\cos(2\theta) = \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 \,,$$

$$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta),$$

sub forma:

$$\begin{cases} J_{x'} = \dfrac{J_x + J_y}{2} + \dfrac{J_x - J_y}{2}\cos(2\theta) - J_{xy}\sin(2\theta), \\ J_{x'} = \dfrac{J_x + J_y}{2} + \dfrac{J_x - J_y}{2}\cos(2\theta) + J_{xy}\sin(2\theta),, \\ J_{x'y'} = \dfrac{(J_y - J_x)}{2}\sin(2\theta) - J_{xy}\cos(2\theta). \end{cases} \qquad (13.23)$$

Derivând expresia lui $J_{x'}$ în raport cu θ şi egalând cu zero obținem o ecuație printre ale cărei rădăcini se află valorile unghiului θ corespunzătoare valorilor extreme ale lui $J_{x'}$ .Această ecuație este :

$$\frac{J_x - J_y}{2}(-\sin(2\theta)) - J_{xy}\cos(2\theta) = 0;$$

de unde:

$$\theta = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(-\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}\right) + \frac{k\pi}{2}; \quad k = 0;1;2......$$ (13.24)

La acelaşi rezultat se ajungea dacă se căutau extremele lui $J_{x'}$. Expresia 13.24 arată că valorile extreme ale momentelor axiale apar după direcții perpendiculare. Direcțiile după care momentul centrifugal $J_{x'y'}$ ia valori extreme se determină în acelaşi mod .

$$\frac{dJ_{x'y'}}{d\theta} = 2\frac{J_y - J_x}{2}\cos(2\theta') - 2J_{xy}\sin(2\theta') = 0$$

$$\theta' = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{J_x - J_y}{2J_{xy}}\right) + \frac{k\pi}{2}; \quad k = 0;1;........$$ (13.25)

se observă ca:

$$\operatorname{tg}(2\theta)\operatorname{tg}(2\theta') = -1$$ (13.26)

Relația 13.21 exprimă perpendicularitatea a două drepte ce fac cu axa Ox unghiurile 2θ şi respectiv $2\theta'$. Matematic se scrie:

$$2\theta - 2\theta' = \pm\frac{\pi}{2}$$ (13.27)

sau :

$$\theta - \theta' = \pm\frac{\pi}{4}$$ (13.28)

Relația 13.28 exprimă proprietatea momentelor centrifugale de a lua valori extreme pe bisectoarea direcțiilor după care momentele axiale își ating extremele. Exprimarea funcțiilor $\sin 2\theta$ și $\cos 2\theta$ cu ajutorul funcției $\mathrm{tg}\, 2\theta$ se face cu relațiile:

$$\sin(2\theta) = \pm\frac{2\mathrm{tg}(\theta)}{\sqrt{1+\mathrm{tg}(\theta)^2}}; \quad \cos(2\theta) = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}(\theta)^2}}$$

pentru care în membrul drept al ambelor relații 13.24 trebuie ales același semn. Efectuarea calculelor permite exprimarea lui $\sin\ 2\theta$ și $\cos 2\theta$ în funcție de J_x, J_y, J_{xz} astfel:

$$\cos(2\theta) = \pm\frac{2(J_x - J_y)}{\sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2}};$$

$$\sin(2\theta) = \pm\frac{2J_{xy}}{\sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2}}. \qquad (13.29)$$

Aceste expresii înlocuite în primele două relații 13.23 dau valorile extreme ale momentelor de inerție axiale:

$$J_{max} = \frac{J_x + J_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2},$$

$$J_{min} = \frac{J_x + J_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2} \qquad 13.30.$$

iar înlocuirea în ultima relație 13.23 duce la:

$$J_{xy} = 0 \qquad 13.31$$

Axele în raport cu care momentele axiale iau valori extreme se numesc *axe principale de inerție*. Momentele față de aceste axe se numesc *momente principale de inerție*. Dacă axele principale trec prin centrul de greutate ele se numesc *axe principale centrale de inerție* iar momentele se numesc *momente principale centrale de inerție*. Relația 13.25 arată că în raport cu axele principale de inerție momentul centrifugal este nul.

XIV Dinamica sistemelor de puncte materiale

14.1 Impulsul unui sistem de puncte materiale. Teorema impulsului pentru un sistem de puncte materiale. Teorema mişcării centrului de masă. Conservarea impulsului

Pentru un sistem de N puncte materiale situate în punctele A_k impulsul sistemului este:

$$\overline{H} = \sum_{k=1}^{N} m_k \overline{v}_{k.} \tag{14.1}$$

Relaţia 14.1 poate fi pusă sub o altă formă dacă se consideră că $\overline{\rho}$ este vectorul de poziţie al centrului de masă al sistemului şi anume:

$$\overline{H} = \sum_{k=1}^{N} m_k \overline{v}_k = \sum_{k=1}^{N} m_k \frac{d\overline{r}_k}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N}(m_k \overline{r}_k) = \frac{d}{dt} m\overline{\rho} = m\frac{d\overline{\rho}}{dt} = m\overline{v}_c \tag{14.2}$$

unde $\overline{v}_c$ este viteza centrului de masă al sistemului.

Teorema impulsului aplicată unui sistem de puncte materiale se enunţă astfel:

Derivata în raport cu timpul a impulsului este egală cu vectorul rezultant al forţelor exterioare. Pentru demonstrarea teoremei se consideră cele N puncte materiale de masă m_k plasate în punctele A_k de vector de poziţie $\overline{r}_k$. Asupra fiecărui punct acţionează o forţă exterioară $\overline{F_k}$ iar din partea fiecărui punct al sistemului o forţă interioară $\overline{F}_{kj}$ (j $\neq$ k, primul indice arată care punct suportă acţiunea iar al doilea care punct exercită acţiunea). Principiul acţiunii şi reacţiunii cere ca, (Fig.14.1):

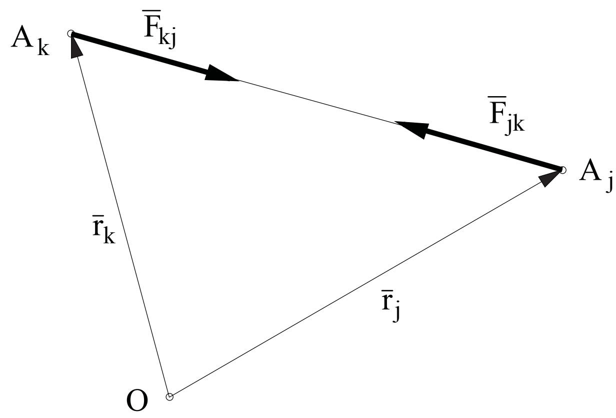


Figura14.1

$$\overline{F}_{kj} + \overline{F}_{jk} = 0;$$

$$\overline{r}_k \times \overline{F}_{kj} + \overline{r}_j \times \overline{F}_{jk} = 0 \tag{14.3}$$

Prima dintre reacțiile 14.3 arată egalitatea modulelor celor două forțe şi că acestea au sensuri contrare, iar cea de a doua ecuație arată că, cele două forțe acționează după un suport comun ce uneşte cele două puncte. Relația a doua se mai poate scrie:

$$0 = \overline{r}_k \times \overline{F}_{kj} + \overline{r}_j \times \overline{F}_{jk} = \overline{r}_k \times \overline{F}_{kj} + \overline{r}_j \times (-\overline{F}_{kj}) = \overline{OA_k} \times \overline{F}_{kj} - \overline{OA_j} \times \overline{F}_{kj} =$$
$$= (\overline{OA_k} - \overline{OA_j}) \times \overline{F}_{kj} = (\overline{A_jO} + \overline{OA_k}) \times \overline{F}_{kj} = \overline{A_jA_k} \times \overline{F}_{kj}.$$

Relația :

$$\overline{A_jA_k} \times \overline{F}_{kj} = 0,$$

probează coliniaritatea dintre cei doi vectori sau coincidența dintre direcția reacțiunii $\overline{F}_{kj}$cu dreapta ce trece prin cele două puncte. Expresia principiului al doilea al dinamicii aplicată pentru fiecare punct A_k:

$$m_k \bar{a}_k = \bar{F}_k + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{N} \bar{F}_{kj}, \quad k = 1,2,....,N; \tag{14.4}$$

Sumând cele N relații 14.4 membru cu membru rezultă:

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \bar{a}_k = \sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k + \sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{N} \bar{F}_{kj}. \tag{14.5}$$

Al doilea termen din membrul drept al relației 14.5 conține perechi de vectori $\bar{F}_{kj} + \bar{F}_{jk}$ a căror contribuție este nulă şi astfel întregul termen se anulează. Pe de altă parte din definiția accelerației din cinematică:

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \bar{a}_k = \sum_{k=1}^{N} m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \frac{d(m_k \bar{v}_k)}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{N} m_k \bar{v}_k = \frac{d\bar{H}}{dt}. \tag{14.6}$$

Coroborând relațiile 14.5 cu 14.6 se obține expresia matematică a teoremei.

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \tag{14.7}$$

Teorema impulsului poate fi exprimată sub o formă echivalentă dacă se exprimă impulsul întregului sistem cu relația 14.2:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \frac{d(m\bar{v}_c)}{dt} = m\frac{d\bar{v}_c}{dt} = m\bar{a}_c. \tag{14.8}$$

Relația 14.7 împreună cu 14.8 exprimă ***teorema mişcării centrului de masă*** al sistemului: *centrul maselor unui sistem de puncte materiale are o mişcare identică cu a unui punct material în care s-ar concentra întreaga masă a sistemului iar* *asupra acestui punct ar acționa toate forțele exterioare (sau vectorul rezultant al forțelor exterioare).*

În cazul în care $\sum_{k=1}^{N} \overline{F}_k = 0$ relația 14.7 se poate integra și se scrie :

$$\overline{H} = \overline{C}, \quad \text{(ecuație vectorială)}. \qquad (14.9)$$

Relația 14.9 exprimă o integrală primă a sistemului de ecuații diferită de 14.4. Ca și în cazul punctului material relația 14.9 rămâne adevărată dacă vectorul rezultant al forțelor exterioare are proiecția nulă după una din axele sistemului,(fie această axă Ox). În acest caz ecuația 14.9 va furniza o integrală primă a sistemului 14.4 numai pentru proiecția pe axa Ox, adică:

$$H_x = C_1. \quad \text{(ecuație scalară)} \qquad (14.10)$$

Dacă se exprimă teorema impulsului cu ajutorul mișcării centrului de masă relațiile 14.9 și 14.10 devin:

$$\overline{v}_c = \frac{\overline{C}}{m}; \quad v_{cx} = \frac{C_1}{m}; \qquad (14.11)$$

care arată că dacă vectorul rezultant al forțelor exterioare ce acționează asupra unui sistem este nul atunci centrul maselor acestui sistem are o mișcare rectilinie uniformă sau este în repaus. Dacă proiecția vectorului rezultant pe o axă este nulă atunci proiecția centrului maselor pe acea masă se mișcă uniformpe acea axă.

14.2 Momentul cinetic al unui sistem de puncte materiale. Teorema momentului cinetic în raport cu un sistem de referință fix.

Prin definiție *momentul cinetic al unui sistem de puncte materiale* este:

$$\overline{K} = \sum_{k=1}^{N} \overline{r}_k \times m_k \overline{v}_k \tag{14.12}$$

Teorema momentului cinetic pentru un sistem de puncte materiale spune că: *pentru un sistem de puncte materiale derivata în raport cu timpul a momentului cinetic, calculat în raport cu un punct fix O, este egală cu vectorul moment rezultant al forțelor exterioare* , adică:

$$\frac{d\overline{K}}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \overline{r}_k \times \overline{F}_k \tag{14.13}$$

Demonstrația este similară cu cea dată pentru teorema impulsului pentru un sistem de puncte cunoscute. Cu notațiile din paragraful 14.1 se înmulțeşte vectorial la stânga cu vectorul de poziție $\overline{r}_k$ fiecare din relațiile 14.4 şi apoi se adună relațiile obținută membru cu membru

$$\sum_{k=1}^{N} \overline{r} \times m_k \overline{a}_k = \sum_{k=1}^{N} \overline{r}_k \times \overline{F}_k + \sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{N} \overline{r}_k \times \overline{F}_{kj}.$$

A doua sumă din membru drept se anulează deoarece poate fi privită ca o sumă de termeni de forma $\overline{r}_k \times \overline{F}_{kj} + \overline{r}_j \times \overline{F}_{jk}$ care sunt nuli conform celei de a doua relație 14.3 .Cu această observație:

$$\sum_{k=1}^{N} \overline{r}_k \times m_k \overline{a}_k = \sum_{k=1}^{N} \overline{r}_k \times \overline{F}_k \tag{14.14}$$

Înlocuirea lui $\bar{a}_k$ cu $\dfrac{d\bar{v}_k}{dt}$ în şirul de egalităţi:

$$\sum_{k=1}^{N}\bar{r}_k \times m_k\bar{a}_k = \sum_{k=1}^{N}\bar{r}_k \times m_k\frac{d\bar{v}_k}{dt} = \sum_{k=1}^{N}\bar{r}_k \times \frac{d(m_k\bar{v}_k)}{dt} =$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\left[\frac{d}{dt}(\bar{r}_k \times m_k\bar{v}_k) - \frac{d\bar{r}_k}{dt}\times(m_k v_k)\right] = \frac{d}{dt}\left[\sum_{k=1}^{N}\bar{r}_k \times (m_k\bar{v}_k)\right] - \sum_{k=1}^{N}\bar{v}_k \times (m_k\bar{v}_k) = \frac{d\bar{K}}{dt}.$$

Termenul $\bar{v}_k \times (m_k\bar{v}_k)$ este identic nul deoarece este produsul scalar a doi vectori coliniari. Înlocuind în 14.14 acest rezultat se obţine relaţia 14.13 . În expresia 14.13 dacă vectorul moment rezultant al forţelor exterioare în raport cu punctul O este nul ($\sum_{k=1}^{N}\bar{r}_k \times \bar{F}_k = 0$)

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{K} = \bar{C}. \qquad \text{(ecuaţie vectorială)} \tag{14.15}$$

Dacă vectorul moment rezultant al forţelor exterioare are proiecţia nulă pe una din axele sistemului (fie axa Oz),atunci:

$$K_z = C\,. \qquad \text{(ecuaţie scalară)} \tag{14.16}$$

14.3 Energia cinetică şi lucrul mecanic în cazul unui sistem de puncte materiale. Teorema energiei cinetice şi a lucrului mecanic în raport cu un sistem de referinţă fix.

Păstrând rotaţiile din ultimele două paragrafe *energia cinetică a unui sistem de puncte materiale* se defineşte:

$$E = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2}m_k v_k^2\,. \tag{14.17}$$

Noțiunea de lucru mecanic se generalizează printr-un sistem de puncte materiale astfel:

$$dL_{ext} = \sum_{k=1}^{N} \overline{F}_k d\overline{r}_k \tag{14.18 a}$$

este *lucrul mecanic elementar al forțelor exterioare* iar :

$$dL_{int} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{N} \overline{F}_{kj}\, d\overline{r}_k . \tag{14.18 b}$$

este *lucrul mecanic elementar al forțelor interioare.* În general mărimile dL_{ext}, dL_{int} nu sunt diferențiale totale exacte. Dacă în cazul impulsului şi a momentului cinetic efectul global al forțelor interioare era nul, în cazul lucrului mecanic situația este diferită. Fie forțele interioare $\overline{F}_{kj}$ şi $\overline{F}_{jk}$ acționând asupra punctului A_k respectiv A_j. Lucrul mecanic elementar al acestor forțe este:

$$\begin{aligned} \overline{F}_{kj} d\overline{r}_k + \overline{F}_{jk} d\overline{r}_j &= \overline{F}_{kj} d\overline{r}_k - \overline{F}_{kj} d\overline{r}_j = \overline{F}_{kj} (\overline{v}_k dt) - \overline{F}_{kj} (\overline{v}_j dt) = \\ &= \overline{F}_{kj} (\overline{v}_k - \overline{v}_j) dt = \overline{F}_{kj}\, \overline{v}_{kj} dt \end{aligned} \tag{14.19}$$

unde

$$\overline{v}_{kj} = \overline{v}_k - \overline{v}_j \tag{14.19}$$

este viteza relativă a punctului A_k față de punctul A_j.

Lucrul mecanic al forțelor interioare este nul dacă:

a) $\overline{F}_{kj} = 0$ (între puncte nu apar forțe exterioare);

b) $\overline{v}_{kj} = 0$ (atunci când două corpuri ale sistemului se rostogolesc fără alunecare unul peste celălalt):

c) $\overline{F}_{kj}$ este perpendicular pe $\overline{v}_{kj}$. Această situaţie apare atunci când:

1 nu există frecare între corpurile sistemului şi deci $\overline{F}_{kj}$ şi $\overline{F}_{jk}$ sunt reacţiuni normale iar viteza relativă $\overline{v}_{kj}$ este conţinută în planul tangent).

2 distanţa dintre punctele A_k şi A_j este constantă. Mişcarea relativă a punctului A_k faţă de punctul A_j se face pe o curbă dispusă pe o sferă a centrului A_k şi de rază $A_k A_j$ (dacă pentru orice două puncte A_k, A_j distanţa dintre acestea rămâne constantă sistemul este rigid).

Se demonstrează ***teorema energiei cinetice*** *pentru un sistem de puncte materiale*. Enunţul teoremei este: *pentru un sistem de puncte materiale variaţia energiei cinetice, faţă de un reper fix, este suma dintre lucrul mecanic al forţelor exterioare şi cel al forţelor interioare.* Matematic relaţia se scrie:

sub formă diferenţială:

$$dE = dL_{ext} + dL_{int} \tag{14.20}$$

sub formă finită

$$E - E_0 = L_{ext} + L_{int} \tag{14.21}$$

Demonstraţia are acelaşi principiu ca în cazul teoremelor impulsului şi a momentului cinetic. Ca şi în cazul punctului material, teorema energiei cinetice conduce la o integrală primă dacă forţele interioare derivă din funcţia de potenţial. Aceasta presupune existenţa unei funcţii de potenţial U_{kj} astfel ca proiecţiile forţelor interioare să se exprime ca derivate a acestei funcţii:

$$X_{kj}=\frac{\partial U_{kj}}{\partial x_k};\quad Y_{kj}=\frac{\partial U_{kj}}{\partial y_k};\quad Z_{kj}=\frac{\partial U_{kj}}{\partial z_k};$$

$$X_{jk}=\frac{\partial U_{jk}}{\partial x_j};\quad Y_{jk}=\frac{\partial U_{jk}}{\partial y_j};\quad Z_{jk}=\frac{\partial U_{jk}}{\partial z_j};\tag{14.22}$$

În acest caz:

$$dL_{int}=\sum_{k=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j<k}}^{N}\overline{F}_{kj}d\overline{r}_k=$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j<k}}^{N}\left(\frac{\partial U_{kj}}{\partial x_k}dx_k+\frac{\partial U_{kj}}{\partial y_k}dy_k+\frac{\partial U_{kj}}{\partial z_k}dz_k+\frac{\partial U_{jk}}{\partial x_j}dx_j+\frac{\partial U_{jk}}{\partial y_j}dy_j+\frac{\partial U_{jk}}{\partial z_j}dz_j\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{k}dU_{kj}=dU$$

Cu notațiile:

$$U=\sum_{k=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j<k}}^{k}U_{kj};\qquad V=-U\tag{14.23}$$

teorema energiei cinetice ia forma.

$$dE=dL_{ext}-dV,\tag{14.24}$$

sau:

$$dL_{ext}=d(E+V)\tag{14.25}$$

E+V se numeşte *energia mecanică internă* a sistemului. În cazul unui sistem de puncte materiale închis (dL_{ext}=0).

$$E + V = const \tag{14.26}$$

În cazul unui sistem de puncte materiale închis pentru care forțele interioare derivă dintr-un potențial energia mecanică internă a sistemului se conservă.

14.4 Teoremele impulsului, momentului cinetic şi energiei cinetice aplicate unui rigid.

Teoremele impulsului momentului cinetic şi energia cinetică se particularizează pentru un rigid prin transformarea sumelor care apar în integrale. Deosebit de sugestiv sunt aceste teoreme exprimate sub forma matriceală.
Astfel:

$$\{H\} = [M]\{v_0\} + \left[\hat{S}\right]^T \{\omega\}. \tag{14.30}$$

unde s-au făcut următoarele notații matriceale:

$$\{H\} = \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix}; \quad \{v_0\} = \begin{bmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \\ v_{0z} \end{bmatrix}; \quad \{\omega\} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix};$$
$$[M] = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & M \end{bmatrix}; \quad \{\hat{S}\} = \begin{bmatrix} 0 & -M\zeta & M\eta \\ M\zeta & 0 & -M\xi \\ -M\eta & M\xi & 0 \end{bmatrix}. \tag{14.31}$$

Teorema impulsului:

$$\frac{d}{dt}\{H\} = [M]\{a_0\} + \left[\hat{S}\right]^T \{\varepsilon\} + [\hat{\omega}]\left[\hat{S}\right]^T \{\omega\} = \{R\} \tag{14.32}$$

cu notațiile

$$\{a_0\} = \begin{bmatrix} a_{0x} \\ a_{0y} \\ a_{0z} \end{bmatrix}; \quad \{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix}; \quad [\omega] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}; \quad \{R\} = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{bmatrix} \tag{14.33}$$

Momentul cinetic al rigidului se exprimă matriceal astfel:

$$\{K\} = \left[\hat{S}\right]\left\{v_0\right\} + [J]\{\omega\} \tag{14.34}$$

unde

$$\{K\} = \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{bmatrix}; \quad [J] = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \tag{14.35}$$

iar ***teorema momentului cinetic*** se exprimă matriceal

$$\frac{d}{dt}\{K\} = \left[\hat{S}\right]\left\{a_0\right\} + [J]\{\varepsilon\} + [\hat{\omega}][J]\{\omega\} = \left\{M_0\right\} \tag{14.36}$$

$$\frac{d}{dt}\{K\} = \left[\hat{S}\right]\left\{a_0\right\} + [J]\{\varepsilon\} + [\hat{\omega}][J]\{\omega\} = \left\{M_0\right\} \tag{14.36}$$

Momentului forțelor rezultante i s-a asociat matricea coloană:

$$\left\{M_0\right\} = \begin{bmatrix} M_{0x} \\ M_{0y} \\ M_{0z} \end{bmatrix}. \tag{14.37}$$

Energia cinetică a rigidului se exprimă matriceal sub forma:

$$E=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} v_{0x} & v_{0y} & v_{0z} & \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 & M\zeta & -M\eta \\ 0 & M & 0 & -M\zeta & 0 & M\xi \\ 0 & 0 & M & M\eta & -M\xi & 0 \\ 0 & -M\zeta & M\eta & J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ M\zeta & 0 & -M\xi & -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -M\eta & M\xi & 0 & -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \\ v_{0z} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

(14.48)

Relația 14.48 se poate scrie mai restrâns.

$$E=\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} v_0 \\ \omega \end{Bmatrix}^T\begin{bmatrix} M & \hat{S}^T \\ \hat{S} & J \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_0 \\ \omega \end{Bmatrix} \tag{14.49}$$

În cazul rigidului teorema energiei cinetice ia o formă mai simplă deoarece $dL_{int}=0$ datorită ipotezei lipsei deplasărilor relative între punctele acestuia.

$$dE=dL_{ext}\,. \tag{14.50}$$

Se poate arăta că:

$$\frac{dE}{dt}=\overline{R}\,\overline{v}_0+\overline{M}_0\overline{\omega} \tag{14.51}$$

relația care sub formă matriceală poate fi scrisă:

$$\begin{Bmatrix} v_0 \\ \omega \end{Bmatrix}^T\begin{bmatrix} M & \hat{S}^T \\ \hat{S} & J \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_0 \\ \varepsilon \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} v_0 \\ \omega \end{Bmatrix}^T\begin{Bmatrix} R \\ M_0 \end{Bmatrix} \tag{14.52}$$

XV Noțiuni elementare de mecanică analitică

15.1 Principiul lui d'Alembert

Mecanica analitică a apărut din necesitatea rezolvării unor probleme de mecanică pentru care mecanica clasică oferă soluții deosebit de complicat sau uneori nu poate furniza aceste soluții. Un rol important în mecanica analitică îl joacă conceptul de legătură care este restricția asupra coordonatelor unui punct material. Spre deosebire de mecanica clasică legăturile în mecanica analitică sunt considerate ideale (fără frecare). Dintre metodele mecanicii analitice se prezintă principiul lui d'Alembert.. Acest principiu permite transformarea problemelor de dinamică în probleme de statică pentru rezolvarea cărora metodologia de rezolvare este simplă.

Al doilea principiu al dinamicii scris pentru un punct material este:

$$\overline{F} = m\bar{a}. \tag{15.1}$$

În cazul în care punctul este supus la legături relația 15.1 nu mai este valabilă iar soluția în mecanica clasică a fost corectarea membrului drept cu o forță suplimentară numită reacțiune introdusă pe baza axiomei legăturilor:

$$m\bar{a} = \overline{F} + \overline{N} \tag{15.2}$$

Nerespectarea ecuației 15.1 se poate interpreta în sensul că numai o parte din forța aplicată duce la modificarea stării de mişcare (accelerație) iar ce rămâne se consumă datorită faptului că punctul este supus legăturilor. Fracțiunea din forța aplicată care produce accelerația se numeşte *forță activă* $\overline{F}_a$ iar cea pierdută cu legăturile se numeşte *forță pierdută* $\overline{F}_p$. Se poate scrie relația :

$$\overline{F} = \overline{F}_a + \overline{F}_p \tag{15.3}$$

unde:

$$\overline{F}_a = m\overline{a} \tag{15.4}$$

Se deduce forța pierdută :

$$\overline{F}_p = \overline{F} - m\overline{a} \tag{15.5}$$

Pentru enunțarea principiului lui d'Alembert se consideră un sistem de puncte materiale $m_1, m_2 ... m_n$ situate în punctele $A_1, A_2 ..... A_n$ respectiv şi acționate de forțele exterioare $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n$. Forțele pierdute vor fi $\overline{F}_1 - m\overline{a}_1, \overline{F}_2 - m\overline{a}_2, ..., \overline{F}_n - m\overline{a}_n$

Principiul lui d'Alembert se enunță astfel: *forțele pierdute* $\overline{F}_k - m_k\overline{a}_k$*, presupuse aplicate unui sistem de puncte materiale supus la legături, formează un sistem de forțe în echilibru.*

Dacă se scrie relația 15.5 sub forma:

$$\overline{F}_p = \overline{F} - m\overline{a}; \tag{15.6}$$

termenul $-m\overline{a}$ reprezintă forța de inerție şi se poate enunța acest principiu şi sub forma: *forțele exterioare* $\overline{F_k}$ *şi forțele de inerție* $-m_k\overline{a}_k$ *presupuse aplicate unui sistem de puncte materiale supus la legături formează împreună un sistem de forțe în echilibru.* Sub această formă principiu lui d'Alembert depăşeşte cadrul mecanicii analitice putând fi aplicat la rezolvarea unei probleme concrete de mecanică, fie utilizând teoremele generale ale mecanicii (impuls, moment cinetic, energie), fie prin metode proprii mecanicii analitice.

Dacă se utilizează metodele generale atunci trebuie introduse reacțiunile care să înlocuiască legăturile. Se obține un al treilea enunț al principiului lui D'Alembert: *dacă se eliberează de legături punctele materiale ale unui sistem şi dacă se introduc forțele date* $\overline{F}_k$ *forțele de inerție,* $-m_k\overline{a}_k$ *şi forțele de legătură* $\overline{R}_{kj}$ *acestea formează împreună un sistem de forțe în echilibru.* Sub această formă principiu lui d'Alembert nu mai constituie în mecanica generală un principiu nou ci o nouă metodă denumită metoda cinetostatică. Această metodă permite determinarea mişcării şi reacțiunilor pentru un sistem de puncte materiale supus la legături cu metodele de rezolvare al problemelor de statică şi cinematică.

15.2 Torsorul forțelor de inerție

Rezolvarea problemelor de dinamică cu ajutorul principiului lui d'Alembert este comodă pentru sisteme discrete de puncte materiale. În cazul corpurilor rigide corpurile ar trebui divizate corpuri în mase elementare dm asupra cărora acționează forțe de inerție $d\overline{F}_i = -\overline{a}dm$. Scrierea ecuațiilor de echilibru cinetostatic conduce la integrale de volum destul de dificil de evaluat. Se poate evita acest neajuns prin găsirea expresiilor generale ale torsorului forțelor de inerție.

Pentru vectorul rezultant $\overline{R'}$ al forțelor de inerție

$$\overline{R}' = \sum_{k=1}^{n}(-m_k\overline{a}_k) = -\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d\overline{v}_k}{dt} = -\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} m_k\overline{v}_k = -\frac{d\overline{H}}{dt} \tag{15.7}$$

Teorema impulsului 14.8 scrisă pentru centrul de masă al sistemului furnizează pentru vectorul rezultant al forțelor de inerție :

$$\overline{R}' = -\frac{d\overline{H}}{dt} = -M\frac{d\overline{v}_c}{dt} = -M\overline{a}_c \tag{15.8}$$

unde $\overline{a}_c$ reprezintă accelerația centrului de masă al sistemului.

Vectorul moment rezultant al forțelor de inerție va fi:

$$\overline{M}'_0=\sum_{k=1}^{n}\bar{r}_k\times(-m_k\bar{a}_k)=-\sum_{k=1}^{n}\bar{r}_k\times m_k\frac{d\bar{v}_k}{dt}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{d}{dt}(\bar{r}_k\times m_k\bar{v}_k)+\sum_{k=1}^{n}\frac{d\bar{r}_k}{dt}\times m_k\bar{v}_k=-$$
$$=-\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}\bar{r}_k\times m_k\bar{v}_k=-\frac{d\overline{K}}{dt} \tag{15.9}$$

Din expresiile 14.30 şi 14.34 corespunzătoare exprimării matriceale a impulsului şi momentului cinetic faţă de un sistem de referinţă fix se deduc imediat componentele torsorului de inerţie pentru cele mai importante mişcări ale rigidului.

a) **rigid în mişcare de translaţie** $\bar{v}=\bar{v}_c$ (toate punctele au aceeaşi viteză)

$$\overline{R}'=-M\bar{a}_c,\quad \overline{M}'_0=\bar{r}_c\times(-M\bar{a}_c). \tag{15.10}$$

unde $\bar{a}_c$ este acceleraţia centrului de masă iar $\bar{r}_c$ este vectorul de poziţie al centrului de masă şi M este masa rigidului.

b) **rigid în mişcare de rotaţie** (rotaţie în jurul axei Oz) $\bar{v}_0=0$, $\bar{\omega}=\omega\bar{k}$.

$$K_x=-J_{xz}\omega,\quad K_y=-J_{yz}\omega;\quad K_z=J_z\omega;$$
$$\overline{M}'_0=-\frac{dK}{dt}=-\frac{\partial\overline{K}}{\partial t}-\bar{\omega}\times\overline{K}=J_{xz}\varepsilon\bar{i}+J_{yz}\varepsilon\bar{j}-J_z\varepsilon\bar{k}-\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 0 & 0 & \omega\\ -J_{xz}\omega & -J_{yz}\omega & J_z\omega\end{vmatrix} \tag{15.11}$$

Presupunând centrul maselor C situat în planul Oxz ($\eta=0$), (Fig.15.1).

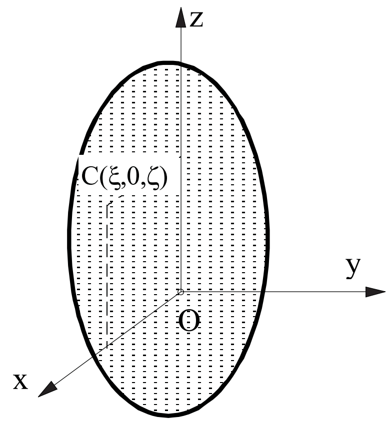


Figura 15.1

$$\bar{a} = -\xi\omega^2\bar{i} + \xi\omega\bar{j}. \tag{15.12}$$

Astfel:

$$\begin{aligned} R'_x &= M\xi\omega^2; \quad M'_x = J_{xz}\varepsilon - J_{yz}\omega^2; \\ R'_y &= -M\xi\varepsilon; \quad M'_y = J_{yz}\varepsilon + J_{xz}\omega^2; \\ R'_z &= 0; \qquad\quad M'_z = -J_z\varepsilon. \end{aligned} \tag{15.13}$$

c) rigid cu punct fix

Se consideră axe ale triedrului mobil axele principale de inerție din punctul fix. Proiecțiile momentului cinetic pe axele principale de inerție sunt:

$$K_x = J_1\omega_x; \quad K_y = J_2\omega_y; \quad K_z = J_3\omega_z \tag{15.14}$$

unde J_1, J_2, J_3 sunt momentele de inerție principale. Cu relația:

$$\overline{M'}_0 = -\frac{dK}{dt} = -\frac{\partial \overline{K}}{\partial t} - \overline{\omega} \times \overline{K} = -J_1\varepsilon_x\bar{i} + J_2\varepsilon_y\bar{j} - J_3\varepsilon_z\overline{k} - \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \overline{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ -J_1\omega_x & -J_2\omega_y & J_3\omega_z \end{vmatrix} \quad (15.15)$$

Torsorul de inerție are componentele:

$$\begin{aligned} \overline{R}' &= -M\bar{a}_c; \\ M_{0x} &= -J_1\varepsilon_x - (J_3 - J_2)\omega_y\omega_z; \\ M_{0y} &= -J_2\varepsilon_y - (J_1 - J_3)\omega_z\omega_x; \\ M_{0z} &= -J_3\varepsilon_z - (J_2 - J_1)\omega_x\omega_y. \end{aligned} \quad (15.16)$$

XVI Noţiuni elementare de cinetostatica şi dinamica mecanismelor

16.1 Cinetostatica mecanismelor

Cinetostatica mecanismelor are drept scop determinarea recţiunilor ce apar în cuplele cinematice care intră în structura mecanismelor. Determinarea recţiunilor este necesară pentru dimensionare elementelor mecanismului.
În cazul mecanismelor plane analiza cinetostatică se realizează lucrând pe grupe structurale. Ordinea de abordare este inversă celei de legare a grupelor în procesul de formare al mecanismului . Se pleacă de dinspre elementul condus spre elementul conducător. Metoda se numeşte cinetostatică pentru că are la bază principiului lui d'Alembert . Într-o primă aproximaţie se consideră că frecarea în cuplele cinematice este nulă şi că există doar reacţiuni normale. Dacă se doreşte luarea în considerare şi a frecării se utilizează un procedeu iterativ în care forţele de frecare dintr-un anumit pas se determină cu ajutorul forţelor normale determinate în pasul precedent. Procedeul se opreşte atunci când diferenţa dintre aceleaşi două reacţiuni corespunzătoare pentru doi paşi consecutivi este mai mică decât o precizie de calcul impusă. Procedeul este rapid convergent şi se iniţializează cu forţele de frecare nule. Nu se recurge la scrierea ecuaţiilor de echilibru cinetostatic cu forţele de frecare corespunzătoare etapei curente deoarece aceste forţe depind de cele normale iar sensul lor este opus mişcării relative dintre elemente care este necunoscută.

Pentru a pute efectua analiza cinetostatică trebuie cunoscute:

a) *forţele de rezistenţă tehnologică;*

forţa de rezistenţă activă $\overline{F}_a$, (pentru învingerea căreia este construit mecanismul) *forța de rezistență pasivă* (acționează asupra elementului condus în faza de mers în gol)

b) *greutățile elementelor cinematice*;

c) *forțele şi momentele de inerție.*

Pentru calculul forțelor şi momentelor de inerție este necesară efectuarea analizei cinematice pentru a cunoaşte accelerațiile centrelor de masă ale elementelor precum şi accelerațiile unghiulare al acestora. Relațiile de calcul pentru forțele şi momentele de inerție sunt:

$$\begin{cases} \overline{F}_i = -m\overline{a}_G; \\ \widetilde{M}_i = -J_G\,\widetilde{\varepsilon}. \end{cases} \tag{16.1}$$

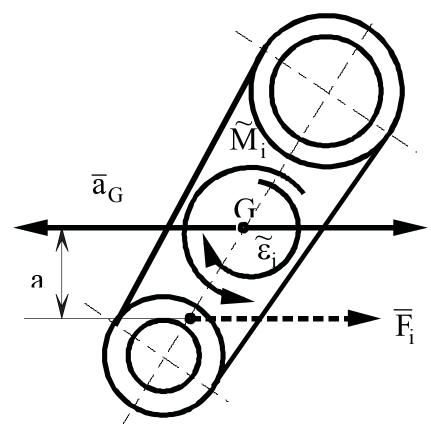


Figura 15.1

În Fig. 16.1 $\overline{a}_G$ este accelerația centrului de greutate G al elementului, $\widetilde{\varepsilon}$ accelerația unghiulară a elementului, m masa elementului şi J_G momentul de inerția faşă de o axă perpendiculară pe planul mişcării şi care trece prin centru de greutate. Uneori, se preferă calculul torsorului forțelor de inerție nu în centrul de greutate al elementului ci într-un alt punct în care momentul să fie nul. Distanța față de centrul de greutate al punctului în care acest deziderat este îndeplinit se determină uşor dacă se ține seama de variația momentului unui vector la schimbarea polului.

$$F_i a - M_i = 0 \Rightarrow a = \frac{M_i}{F_i}.$$ (16.2)

d) *caracteristicile recțiunilor ce lucrează într-o cuplă inferioară*

În cupla de rotație, (Fig. 16.2) pentru reacțiune nu se cunosc nici modulul nici direcția dar se ştie că trebuie să treacă prin centrul cuplei. Pentru cupla de translație, (Fig.16.3) se cunoaşte direcția reacțiunii (normală la viteza relativă dintre elemente) dar nu se cunosc mărimea şi punctul de aplicație. Punctul de aplicație poate fi precizat direct prin distanța *a* de la suportul forței la centrul cuplei sau, aşa cum s-a arătat în secțiunea referitore la vectori alunecători, prin momentul reacțiunii față de centrul cuplei.

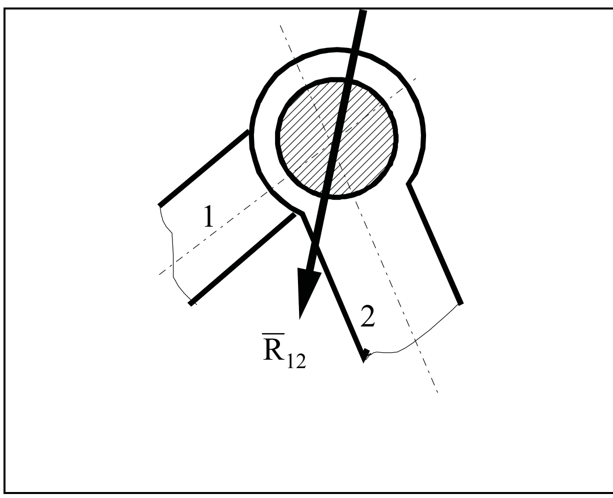


Figura 16.3

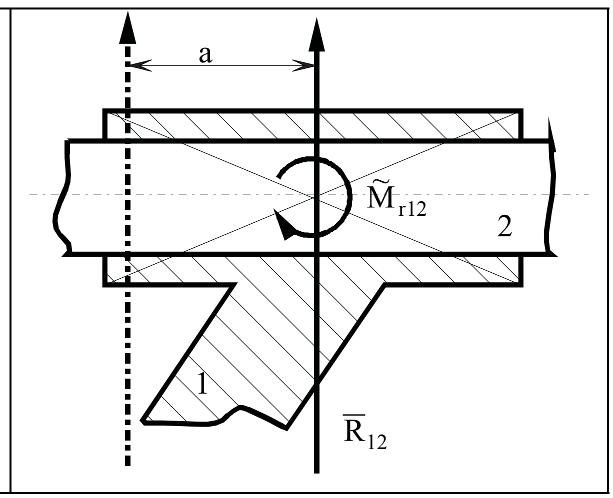


Figura 16.4

Observație: Dacă mecanismul conține cuple superioare acestea vor trebui în prealabil înlocuite după cum s-a arătat la analiza structurală.

O reacțiune este afectată de doi indici: primul indice arată elementul care exercită acțiunea iar al doilea indică pe cel care suportă acțiunea.

După ce s-au determinat forțele şi momentele de inerție se face , pentru fiecare element, reducerea în acelaşi punct a forțelor exterioare (greutate , forţă de inerţie, forţă de frecare şi când este cazul forţă tehnologică). În final va trebui ca asupra fiecărui element să acţioneze o singură forţă şi un singur moment.

Analiza cinetostatică a grupelor structurale se face scriind ecuaţii de echilibru pentru momentele şi forţele ce acţionează asupra unui element sau a întregii grupe. Ecuaţiile de forţe vor fi ecuaţii vectoriale plane şi pot avea două necunoscute :

- fie două reacţiuni de direcţii cunoscute şi de mărimi necunoscute;
- fie o reacţiune total necunoscută.

Pentru rezolvarea acestor ecuaţii vectoriale se utilizează poligonul forţelor în care vectorii ce apar în structura ecuaţiilor se reprezintă la scară. Ecuaţiile de forţe vor trebui scrise astfel încât dacă conţin două reacţiuni de direcţii cunoscute şi mărimi necunoscute aceste reacţiuni să ocupe primul şi ultimul loc în ecuaţie iar dacă conţin o reacţiune complet necunoscută acesta va fi plasată pe ultimul loc. Construcţia poligonului începe cu primul termen cunoscut aşezând vectorii unul cu originea în vârful celui precedent. În primul caz prin originea primului vector cunoscut se duce direcţia primului vector necunoscut care se va intersecta cu direcţia ultimului vector necunoscut dusă prin vârful ultimului vector cunoscut. Se determină mărimile şi sensurile celor două reacţiuni necunoscute din condiţia de închidere a poligonului. În ce de-al doilea caz după construcţia vectorilor cunoscuţi reacţiunea necunoscută va trebui să închidă poligonul.

Ecuaţiile de momente sunt ecuaţii scalare deoarece toate momentele sunt dirijate normal pe planul mişcării. Ecuaţiile de momente nu pot conţine decât o necunoscută şi se rezolvă analitic. Pentru exemplificare se consideră diada de aspect 2 (RRT). Aceasta se reprezintă la scară ca în Figura 16.4 şi se trec pe figură momentele şi forţele care solicită fiecare dintre elementele 2 şi 3.

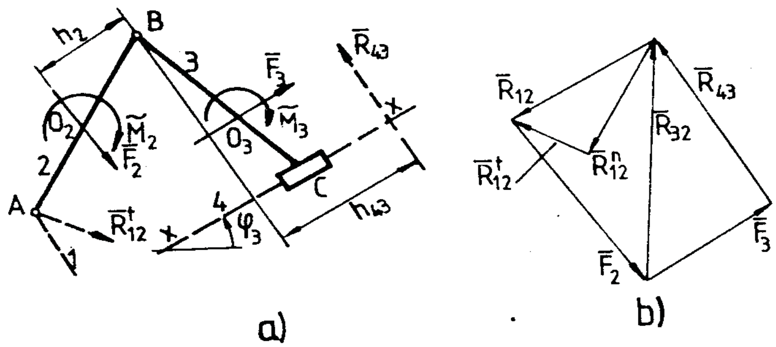


Figura 16.4

Reacțiunea necunoscută $\overline{R}_{12}$ se descompune după două direcții: normală $\overline{R}_{12}^{n}$, (în lungul elementului 2) și tangențială $\overline{R}_{12}^{t}$, (perpendiculară pe acest element).

$$\overline{R}_{12} = \overline{R}_{12}^{n} + \overline{R}_{12}^{t}. \qquad (16.3)$$

$\overline{R}_{12}^{n}$ nu dă moment față de punctul B (deoarece trece prin acest punct). Se poate scrie ecuația de echilibru de momente față de punctul B pentru momentele ce acționează asupra elementului 2. Se alege un sens pozitiv pentru momente. Sensul reacțiunii $\overline{R}_{12}^{t}$ se alege astfel ca momentul său față de punctul B să fie pozitiv. Ecuația de momente este:

$$\sum \widetilde{M}_B(2) = 0; \;\; R_{12}^{t}\ell_{AB} + \widetilde{M}_B(\overline{F}_2) + \widetilde{M}_2 = 0 \qquad (16.4)$$

$$\widetilde{M}_B(\overline{F}_2) = F_2\, h_2 \qquad (16.5)$$

unde h_2 este brațul forței $\overline{F}_2$ față de punctul B, măsurat pe figură și trecut prin scară. Dacă din ecuația 16.4 $\overline{R}_{12}^{t}$ rezultă pozitiv, sensul adoptat este corect, dacă nu, în calculele ulterioare sensul acestui vector va fi contrar celui presupus inițial.

Ecuaţia de echilibru de forţe pentru întreaga grupă are forma:

$$\sum \overline{F}(2,3)=0;\ \underline{\overline{R}_{12}^{n}}+\underline{\underline{\overline{R}_{12}^{t}}}+\underline{\underline{\overline{F}_{2}}}+\underline{\underline{\overline{F}_{3}}}+\underline{\overline{R}_{43}}=0 \tag{16.6}$$

$$\overline{R}_{12}^{n}\|AB;\ \overline{R}_{43}\perp \text{xx}.$$

Termenii subliniaţi cu două linii sunt cunoscuţi iar cei subliniaţi cu o singură linie au doar direcţiile cunoscute. Rezolvarea ecuaţiei se face se face în poligonul forţelor Fig. 15.5b . În ecuaţia 16.6 nu au fost introduse reacţiunile $\overline{R}_{32}$ şi $\overline{R}_{23}$ deoarece conform principiului acţiunii şi reacţiunii aceştia se anulează reciproc. Ecuaţia de echilibru de forţe pentru unul din elementele grupei permite determinarea reacţiunii din cupla centrală.

$$\sum \overline{F}(2)=0;\ \underline{\underline{\overline{R}_{12}^{n}}}+\underline{\underline{\overline{R}_{12}^{t}}}+\underline{\underline{\overline{F}_{2}}}+\overline{R}_{32}=0 \tag{16.7}$$

Ecuaţia conţine ca necunoscută reacţiunea $\overline{R}_{32}$ care se determină din poligonul de forţe. În final ecuaţia de echilibru pentru momente faţă de punctul C, scrisă pentru elementul 3
permite determinarea braţului h_{43}.

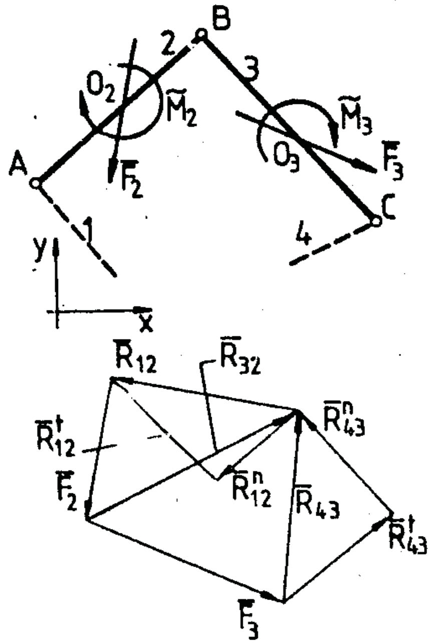
$$\sum \widetilde{M}_{C}(3)=0;\ R_{43}h_{43}+\widetilde{M}_{C}(\overline{F}_{3})+\widetilde{M}_{3}=0 \tag{15.8}$$

În TABELUL 16.1 se prezintă soluţiile grafoanalitice pentru grupele structurale de clasa a doua şi pentru elementele conducătoare în mişcare de rotaţie şi de translaţie.

TABELUL 16.1

	Schiţa grupei structurale şi ecuaţiile de echilibru

022, aspectul 1



$$\bar{R}_{12} < \begin{matrix} \bar{R}^n_{12} // AB \\ \bar{R}^t_{12} \perp AB \end{matrix} \qquad \bar{R}_{43} < \begin{matrix} \bar{R}^n_{43} // BC \\ \bar{R}^t_{43} \perp BC \end{matrix}$$

$\Sigma \tilde{M}_B(2)=0$

$$R^t_{12} l_{AB} + \tilde{M}_B(F_2) + \tilde{M}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad R^t_{12}$$

$\Sigma \tilde{M}_B(3)=0$

$$R^t_{43} l_{BC} + \tilde{M}_B(F_3) + \tilde{M}_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad R^t_{43}$$

$\Sigma \bar{F}(2,3)=0$

$$\bar{R}^n_{12} + \bar{R}^t_{12} + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{R}^n_{43} + \bar{R}^t_{43} = 0$$

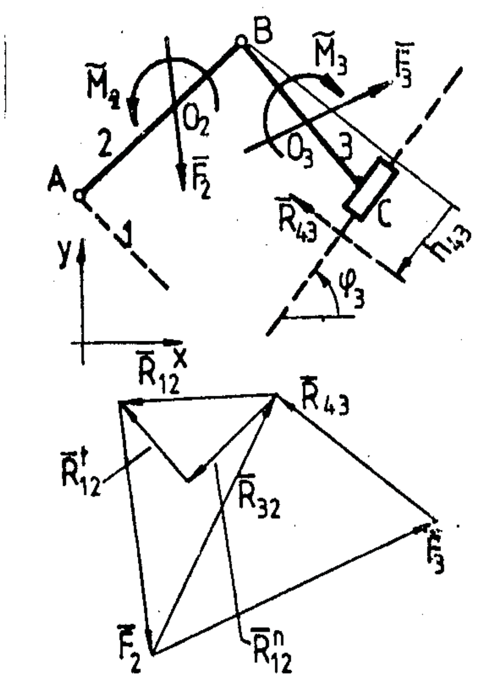
$$\Downarrow$$

$$\bar{R}^n_{12}, \bar{R}^n_{43}$$

$\Sigma \bar{F}(2)=0$

$$\bar{R}_{12} + \bar{F}_2 + \bar{R}_{32} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{R}_{32}$$

022, aspectul 2



$$\bar{R}_{12} < \begin{matrix} \bar{R}^n_{12} // AB \\ \bar{R}^t_{12} \perp AB \end{matrix}$$

$\Sigma \tilde{M}_B(2)=0$

$$R^t_{12} l_{AB} + \tilde{M}_B(F_2) + \tilde{M}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad R^t_{12}$$

$\Sigma \bar{F}(2,3)=0$

$$\bar{R}^n_{12} + \bar{R}^t_{12} + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{R}_{43} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{R}^n_{12}, \bar{R}_{43}$$

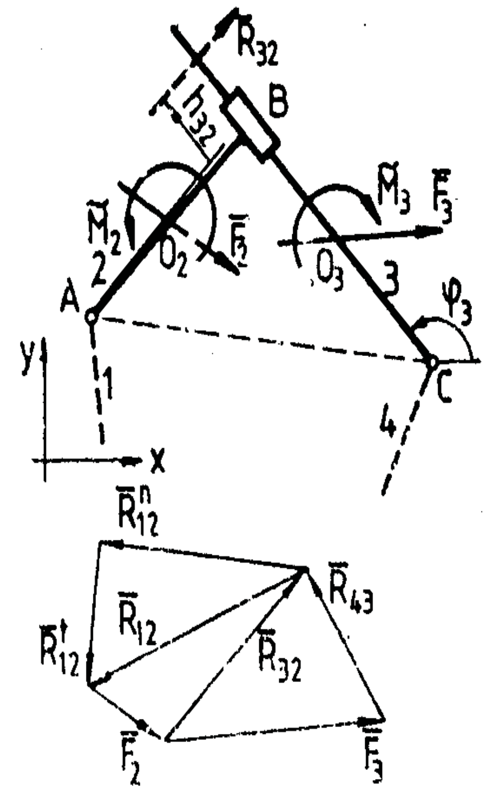
$\Sigma \bar{F}(2)=0$

$$\bar{R}_{12} + \bar{F}_2 + \bar{R}_{32} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{R}_{32}$$

$\Sigma \tilde{M}_B(3)=0$

$$R_{43} h_{43} + \tilde{M}_B(F_3) + \tilde{M}_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad h_{43}$$

022, aspectul 3



$$\bar{R}_{12} < \begin{matrix} \bar{R}_{12}^{n} // AC \\ \bar{R}_{12}^{t} \perp AC \end{matrix}$$

$$\sum \tilde{M}_C(2,3)=0$$

$$R_{12}^{t} \cdot AC+\tilde{M}_C(F_2)+\tilde{M}_2+\tilde{M}_C(F_3)+\tilde{M}_3=0 \;\Downarrow\; R_{12}^{t}$$

$$\sum \bar{F}(2)=0$$

$$\bar{R}_{12}^{n}+\bar{R}_{12}^{t}+\bar{F}_2+\bar{R}_{32}=0 \;\Downarrow\; \bar{R}_{12}^{t}, \bar{R}_{32}$$

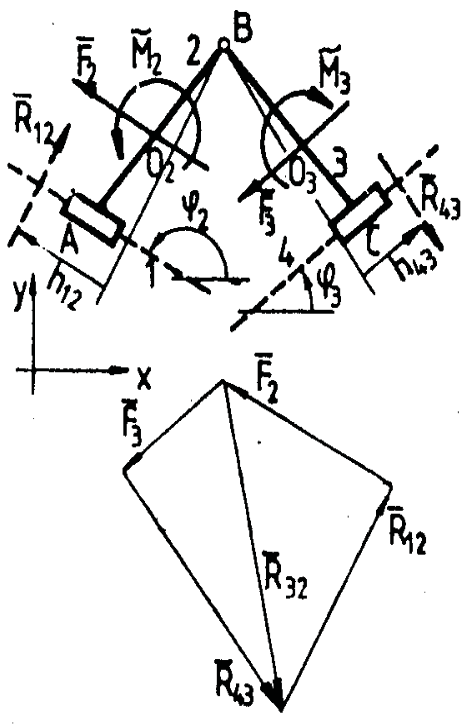
$$\sum \bar{F}(2,3)=0$$

$$\bar{R}_{12}+\bar{F}_2+\bar{F}_3+\bar{R}_{43}=0 \quad \Rightarrow \quad \bar{R}_{43}$$

$$\sum \tilde{M}_A(2)=0$$

$$R_{32}h_{32}+\tilde{M}_A(F_2)+\tilde{M}_2=0 \quad \Rightarrow \quad h_{32}$$

022, aspectul 4



$$\sum \bar{F}(2,3)=0$$

$$\bar{R}_{12}+\bar{F}_2+\bar{F}_3+\bar{R}_{43}=0 \quad \Rightarrow \quad \bar{R}_{12}, \bar{R}_{43}$$

$$\sum \bar{F}(2)=0$$

$$\bar{R}_{12}+\bar{F}_2+\bar{R}_{32}=0 \quad \Rightarrow \quad \bar{R}_{32}$$

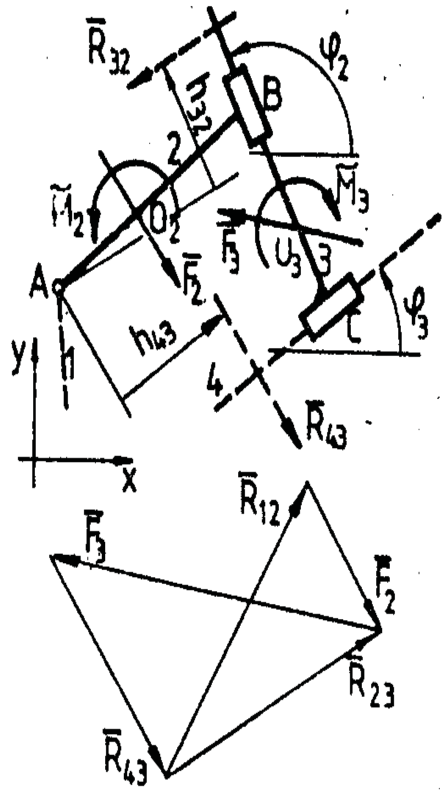
$$\sum \tilde{M}_B(2)=0$$

$$R_{12}h_{12}+\tilde{M}_B(F_2)+\tilde{M}_2=0 \quad \Rightarrow \quad h_{12}$$

$$\sum \tilde{M}_B(3)=0$$

$$R_{43}h_{43}+\tilde{M}_B(F_3)+\tilde{M}_3=0 \quad \Rightarrow \quad h_{43}$$

022, aspectul 5



$$\Sigma \bar{F}(3)=0$$

$$\bar{R}_{23}+\bar{F}_3+\bar{R}_{43}=0 \quad \Rightarrow \quad \bar{R}_{23}, \bar{R}_{43}$$

$$\Sigma \bar{F}(2,3)=0$$

$$\bar{R}_{12}+\bar{F}_2+\bar{F}_3+\bar{R}_{43}=0 \quad \Rightarrow \quad \bar{R}_{12}$$

$$\Sigma \tilde{M}_A(2)=0$$

$$R_{32}h_{32}+\tilde{M}_A(F_2)+\tilde{M}_2=0 \quad \Rightarrow \quad h_{32}$$

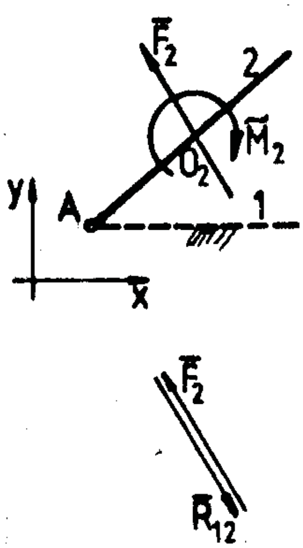
$$\Sigma \tilde{M}_A(2,3)=0$$

$$R_{43}h_{43}+\tilde{M}_A(F_2)+\tilde{M}_2+\tilde{M}_A(F_3)+\tilde{M}_3=0$$

$$\Downarrow$$

$$h_{43}.$$

111



$$\Sigma \bar{F}(2)=0$$

$$\bar{R}_{12}+\bar{F}_2=0 \quad \Rightarrow \quad \bar{R}_{12}$$

$$\Sigma \tilde{M}_A(2)=0$$

$$\tilde{M}_e+\tilde{M}_A(F_2)+\tilde{M}_2=0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{M}_e$$

Dacă ecuațiile de echilibru de forțe ce intervin în determinarea reacțiunilor se proiectează pe axele unui sistem de coordonate convenabil ales se obțin câte două ecuații scalare de echilibru pentru fiecare ecuație vectorială.

Acestea se pot rezolva analitic alături de ecuaţiile de momente şi metoda capătă un caracter analitic.

Pentru elementele conducătoare se impune o observaţie. Dacă se consideră elementul conducător în mişcare de rotaţie, pentru echilibrul cinetostatic al acestuia se pot scrie două ecuaţii de proiecţii de forţe şi o ecuaţie scalară de momente. Se obţin în final trei ecuaţii de echilibru care conţin numai două necunoscute (proiecţiile reacţiunii $\overline{R}_{12}$). Aparent problema este incompatibilă deoarece numărul ecuaţiilor (trei) este mai mare decât al necunoscutelor (două). Pentru a face problema compatibilă se mai introduce o necunoscută; *forţa sau momentul de echilibrare*. . Introducerea acestei mărimi este firească pentru că în analiză s-a presupus că mişcarea elementului conducător este prestabilită nefiind influenţată nici de poziţia mecanismului şi nici de forţele care acţionează asupra elementelor lui.

16.2 Fazele mişcării maşinii

Prin *maşină* se înţelege unitatea dinamică obţinută prin legarea unui motor la un mecanism de lucru. Pentru o analiză dinamică unitară se caută echivalarea maşinii cu un model mai simplu astfel ca orice mecanism să poată fi redus la un model dinamic echivalent. Se utilizează două tipuri d elemente de reducere:

- element de reducere în mişcare de translaţie cu viteza $\overline{v}$caracterizat de masa redusă m_{red} acţionat de forţa redusă $\overline{F}_{red}$;
- element de reducere în mişcare de rotaţie cu viteza unghiulară $\widetilde{\omega}$ caracterizat de momentul de inerţie redus J_{red} acţionat de cuplul $\widetilde{M}_{red}$.

Determinarea caracteristicilor inerţiale m_{red} şi J_{red} ale modelelor de reducere s eimpune condiţia egalităţii între energia cinetică a mecanismului şi a modelului de reducere. Pentru cele două modele, în ipoteza unor mecanisme cu mişcare plan paralelă se poate scrie:

$$\frac{1}{2} m_{red} v^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(m_k \frac{v_{Gk}^2}{2} + J_{Gk} \frac{\omega_k^2}{2} \right)$$

(16.9 a)

$$\frac{1}{2} J_{red} \omega^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(m_k \frac{v_{Gk}^2}{2} + J_{Gk} \frac{\omega_k^2}{2} \right)$$

(16.9 b)

unde m_k şi J_{Gk} reprezintă masa elementului **k** respectiv momentul de inerție al acestuia în raport cu axă perpendiculară pe planul mişcării şi care trece prin centrul de greutate iar $\overline{v}_{Gk}$ şi $\widetilde{\omega}_k$ viteza centrului de masă şi viteza unghiulară a aceluiaşi element.

Pentru calculul forței reduse $\overline{F}_{red}$ şi a momentului redus $\widetilde{M}_{red}$ se impune condiția ca puterile modelului şi a mecanismului să fie aceleaşi. Astfel:

$$\overline{F}_{red} \overline{v} = \sum_{k=1}^{n} (\overline{F}_k \overline{v}_{Gk} + \widetilde{M}_k \widetilde{\omega}_k)$$

(15.10 a)

$$\widetilde{M}_{red} \widetilde{\omega} = \sum_{k=1}^{n} (\overline{F}_k \overline{v}_{Gk} + \widetilde{M}_k \widetilde{\omega}_k)$$

(15.10 b)

unde $\overline{F}_k$ şi $\widetilde{M}_k$ reprezintă componentele torsorului forțelor exterioare ce acționează asupra elementului k, torsor calculat în centrul de greutate al elementului.

În continuarea se consideră că motorul este de tip rotativ. O diagramă a variației vitezei unghiulare a elementului de reducere funcție de unghiul de rotație al elementului arată ca în Fig.16.6.

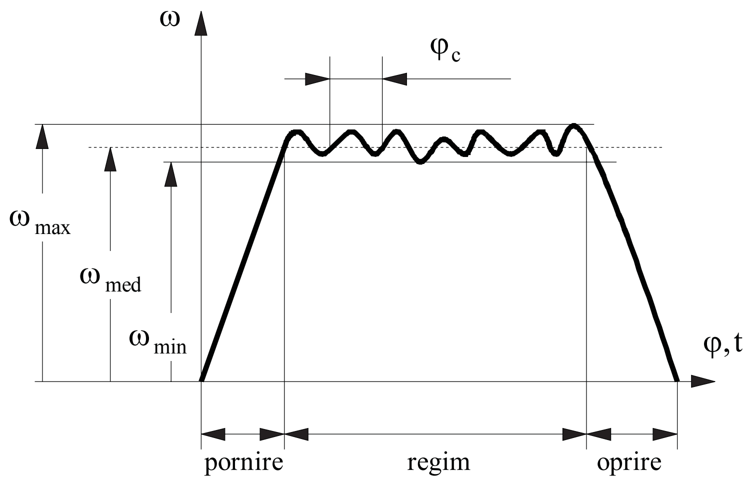


Figura 16.6.

Ciclul geometric reprezintă durata minimă după care mecanismul ocupă aceeaşi poziție.

Ciclul cinematic reprezintă durată minimă după care toți parametrii cinematici ai mecanismului revin la aceleaşi valori. Ciclul cinematic este un multiplu întreg de cicluri geometrice. Figura 16.6 pune în evidență următoarele faze:

faza de *pornire* în care viteza unghiulară a elementului creşte;

faza de *regim* în care viteza elementului de reducere are o variație periodică în jurul unei valori de echilibru numită viteză de regim;

faza de *oprire* în care viteza scade de la viteza de regim la zero.

Faza de regim este caracterizată de doi parametri:

viteza unghiulară medie ω_{med}

$$\omega_{med} = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2}; \qquad (16.11)$$

gradul de neuniformitate δ

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{2} \;. \qquad (16.12)$$

Aplicarea teoremei energiei cinetice sub formă finită în cazul modelului de reducere în mişcare de rotaţie furnizează ecuaţia:

$$E_c - E_{c0} = L \qquad (15.13)$$

E_c, E_{c0} sunt energiile cinetice pentru poziţiile curentă şi iniţială iar L este lucrul mecanic al forţelor ce lucrează asupra modelului. Lucrul mecanic este compus din lucrul mecanic motor L_m (pozitiv) şi lucrul mecanic rezistent L_r (negativ). Cu aceste precizări ecuaţia 15.13 devine:

$$\frac{1}{2} J_{red}\omega^2 - \frac{1}{2} J_{red0}\omega_0^2 = L_m - L_r \qquad (16.14)$$

Se presupune că intervalul pentru care se scrie ecuaţia 15.14 corespunde unui ciclu cinematic.

$$J_{red} = J_{red0} \qquad (16.15)$$

Bilanţul energetic ia forma:

$$\frac{1}{2} J_{red}(\omega^2 - \omega_0^2) = L_m - L_r \qquad (16.16)$$

a) Pentru *faza de regim* $\omega = \omega_0$

$$L_m = L_r \qquad (16.17)$$

)

Relaţia 16.17 arată că pentru instalarea fazei de regim trebuie să înregistrăm perioade egale în care lucrul mecanic motor să fie egal cu lucrul mecanic rezistent

b) Pentru *faza de pornire* $\omega > \omega_0$

$$L_m > L_m \qquad (15.18)$$

Relaţia 16.18 descrie matematic condiţia de realizarea a pornirii: Pentru o pornire cât mai rapidă trebuie ca diferenţa $L_m - L_r$ să fie cât mai mare. Acest lucru se realizează practic prin pornirea în gol a maşinii (în absenţa forţelor tehnologice)

c) Pentru *faza de oprire* $\omega < \omega_0$

$$L_m < L_r \qquad (16.19)$$

Relaţia 16.19 arată că pentru realizarea opririi diferenţa $L_r - L_m$ trebuie să fie cât mai mare dacă se doreşte o oprire rapidă. Practic, în vederea unei opriri rapide motorul maşinii se opreşte $L_m = 0$ iar L_r se măreşte prin acţiunea unor dispozitive de frânare.

16.3 Randamentul mecanic

Randamentul mecanic este un parametru care arată eficienţa cu care maşină utilizeaă lucrul mecanic furnizat de către motorul de acţionare.

Dacă se consideră un ciclu cinematic pe parcursul căruia lucrul mecanic al forţelor de inerţie şi al celor de greutate este nul atunci lucrul mecanic L_m furnizat de către motorul maşinii este consumat pentru învingerea forțelor tehnologice (lucru mecanic util L_u) şi pentru învingerea forțelor şi momentelor de frecare din cuplele cinematice (lucrul mecanic al forțelor de frecare L_f. Randamentul mecanic □ se defineşte ca raportul dintre lucrul mecanic util şi lucrul mecanic motor.

$$\eta = \frac{L_u}{L_m} \tag{16.20}$$

Un alt parametru dinamic este coeficientul de pierderi □ definit ca raportul dintre lucrul mecanic al forțelor de frecare şi lucrul mecanic motor:

$$\psi = \frac{L_f}{L_m} \tag{16.21}$$

Pe parcursul unui ciclu cinematic

$$L_m = L_u + L_f \tag{16.22}$$

de unde rezultă:

$$\eta + \psi = 1 \tag{16.23}$$

Deoarece practic frecarea nu poate fi eliminată $L_f > 0$ astfel că:

$$\begin{aligned} &0 \le \eta < 1; \\ &0 < \psi \le 1 \end{aligned} \tag{16.24}$$

Randamentul mecanismelor complexe

În practică marea majoritate a maşinilor sunt formate din mecanisme simple legate în diferit moduri. Se vor analiza două dintre modurile de legare: legarea în serie şi legarea î paralel.

Legarea în serie presupune ca lucrul mecanic util furnizat de un mecanism să fie lucru mecanic motor pentru mecanismul care îi urmează, (Fig.16.7).

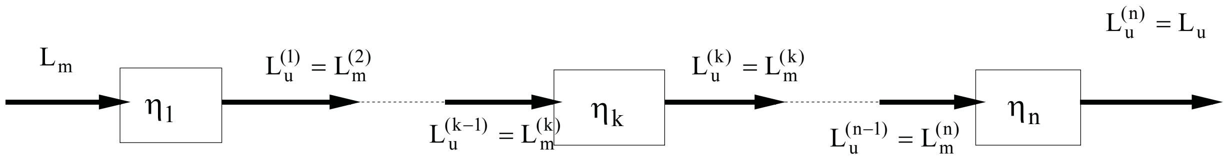


Figura 16.7

Se scriu ecuațiile de bilanț energetic pentru fiecare mecanism:

$$\begin{aligned} &L_u^{(1)} = \eta_1 L_m^{(1)};\\ &L_u^{(2)} = \eta_1 L_m^{(2)};\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &L_u^{(k)} = \eta_k L_m^{(k)}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &L_u^{(n)} = \eta_n L_m^{(n)} \end{aligned} \tag{16.25}$$

Din modul de legare al mecanismelor rezultă:

$$\begin{aligned} &L_m^{(1)} = L_m;\\ &L_m^{(2)} = L_u^{(1)};\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &L_m^{(k)} = L_u^{(k-1)}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &L_m^{(n)} = L_m^{(n-1)}\\ &L_u = L_u^{(n)} \end{aligned} \tag{16.26}$$

Înmulțirea membru cu membru a relațiilor 16.25 coroborată cu relațiile 16.26, conduce, după efectuarea simplificărilor, la expresia randamentului global

$$\eta_s = \frac{L_u}{L_m} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \ldots\ldots \cdot \eta_n. \tag{16.27}$$

Randamentul unei grupări de mecanisme legate în ***serie*** *este egal cu produsul randamentelor mecanismelor componente*.

Legarea în paralel a mai multor mecanisme elementare presupune legarea elementului de intrare al fiecărui mecanism la aceeaşi sursă furnizoare de lucru mecanic, (Fig.16.8). Se presupun cunoscute randamentele mecanismelor elementare η_k şi *coeficienții de repartiție* β_k ai lucrului mecanic util pentru fiecare mecanism. Coeficienții de repartiție se definesc

$$\begin{aligned} &\beta_k = \frac{L_m^k}{L}; \\ &0 \le \beta_k \le 1;\ k = 1,2,\ldots,n; \\ &\beta_1 + \beta_2 + \ldots\ldots + \beta_n = 1. \end{aligned} \tag{16.29}$$

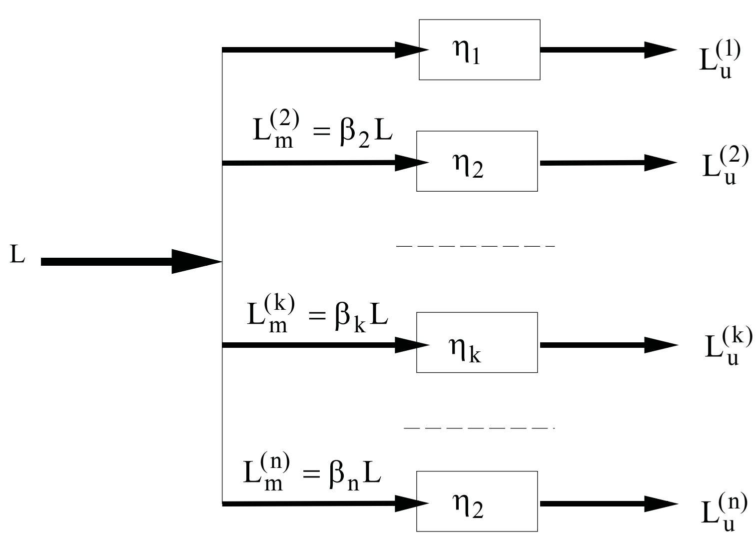


Figura 16.8

Randamentul la legarea în paralel va fi

$$\eta_p = \frac{L_u}{L_m} = \frac{L_u^{(1)} + L_u^{(2)} + ... + L_u^{(n)}}{L} = \frac{\eta_1\beta_1 L + \eta_2\beta_2 L + ... + \eta_n\beta_n L}{L}$$

şi în final

$$\eta_p = \beta_1\eta_1 + \beta_2\eta_2 + ... + \beta_n\eta_n. \qquad (16.30)$$

Pentru a putea face o comparație între randamentele celor două mecanisme complexe presupunem că

$$\eta_1 = \eta_2 = ... = \eta_n = \eta \qquad (16.31)$$

$$\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_n = \frac{1}{n}$$

În aceste ipoteze cele două randamente devin:

$$\eta_s = \eta^n; \quad \eta_p = \eta . \qquad (16.32)$$

Din relațiile16.32 se vede că randamentul la legarea în serie este scade în progresie geometrică iar la legarea în paralel randamentul este egal cu randamentul oricăruia dintre mecanismele elementare. În practică se utilizează o variantă intermediară numită legare mixtă.